ISSN 0130-2221

КВАНТ

4
1981

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

Космонавты Валерий Рюмин и Леонид Попов у звездного глобуса в планетарии Центра подготовки космонавтов имени Ю. А. Гагарина.

Фото А. Моклецова

Квант

4
1981

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки — космонавты Виктор Горбатко и Фам Туан в кабине космического корабля «Союз»
Фото А. Моклецова

Подвиг Гагарина бессмертен

«12 апреля 1961 года первый в мире советский космический корабль «Восток» с человеком на борту, совершив полет вокруг земного шара, благополучно вернулся на священную землю нашей родины. Первый человек, проникший в космос,— гражданин Союза Советских Социалистических Республик Юрий Алексеевич Гагарин». Так писала газета «Правда» на следующий день после полета.

Спросите своих родителей, какие чувства овладели ими, когда они узнали об этом событии. Огромная радость, гордость за нашу родину, за все человечество, сделавшее первый и самый трудный шаг в космос — вот что испытали очевидцы этого великого события. Невозможно было оставаться дома. Люди хлынули на улицы городов и сел, и на страницах того же номера «Правды» мы видим толпы сияющих людей на Манежной площади, на улице Горького и на Невском проспекте.

Трудно поверить, что с тех пор прошло всего лишь двадцать лет — так много было сделано в исследовании космоса за эти годы. Немало космических аппаратов различной конструкции побывало на Луне, Венере и Марсе. Вступил на поверхность Луны человек. Космические зонды пролетели вблизи Сатурна и Юпитера. Более трех лет успешно действует долговременная космическая станция «Салют-6», на которой работали семь международных космических экипажей братских социалистических стран. Более тысячи советских искусственных спутников Земли побывали в космосе, выполняя обширную программу разнообразных научных исследований. Более двадцати международных искусственных спутников было запущено по программе «Интеркосмос».

День ото дня растет роль космических исследований в нашей земной жизни. Космические спутники революционно изменили современную технику связи, позволили одновременно транслировать телевизионные передачи на огромные пространства земного шара. Метеорологические спутники помогают ученым глубже проникнуть в «кухню» погоды, в тайны земного климата. Космонавты исследуют мировые запасы льда и пресной воды, обнаруживают лесные пожары в отдельных районах нашей планеты, скопления рыб в океанах и морях, прогнозируют урожай и следят за состоянием посевов. Спутники помогают обнаруживать богатые месторождения полезных ископаемых, облегчают проводку судов в океанах, заблаговременно предупреждают о возникновении очагов распространения сельскохозяйственных вредителей. Выполнено много ценных медицинских, биологических и технологических экспериментов в космосе.

Наша страна прилагает огромные усилия к тому, чтобы исследования космоса носили сугубо мирный характер, помогали всему человечеству улучшать и совершенствовать жизнь на Земле.

Космос неисчерпаем, и нет конца его исследованиям. Человечество, говоря словами Константина Эдуардовича Циолковского, уже вышло из своей земной колыбели и устремилось к далеким звездным мирам. Впереди — огромный объем работы, множество интереснейших задач, которые придется решать вдали от родной Земли. И хочется верить, что многие наши читатели станут активными участниками будущих исследований космоса.

А. Прохоров

О становлении молодого ученого

Обращаясь к молодежи, считаю необходимым обсудить вопрос об авторитете старших и самостоятельности молодых.

Надо сказать, что этот крайне важный вопрос возникает очень рано, при выборе молодым человеком поля деятельности. Этот выбор должен делаться по призванию, а не по принятому мнению среды, ближнего окружения, не по мнению родителей, не из престижных соображений. Авторитеты надо уважать, прислушиваться к их мнению, учиться у них и использовать их опыт, но не следовать им слепо, если есть способность к собственному мышлению, если есть собственное мнение. Другое дело, что это собственное мнение не должно быть капризом или данью моде, оно должно быть творчески сформировано и даже выстрадано молодым человеком при всестороннем полном и глубоком учете опыта, мнений, советов авторитетных для него людей.

Надо сказать, что без способности к собственному мышлению, без умения вырабатывать собственное мнение, без желания это мнение отстаивать бессмысленно даже пытаться выбирать для себя в качестве поля деятельности научно-исследовательскую работу.

Но вот выбор сделан, необходимое для начала образование получено, молодой человек приступает к научно-исследовательской работе. Крайне важно для него теперь сохранить и дальше развивать умение учиться, ос-

---

Академик Александр Михайлович Прохоров — лауреат Нобелевской, Ленинской и Государственных премий, академик-секретарь Отделения общей физики и астрономии, заместитель директора Физического института имени П. Н. Лебедева Академии наук СССР.

Статья перепечатывается из сборника «Ленин. Наука. Молодежь» (М., «Наука», 1980).

мысливая опыт старших и вырабатывая свое собственное отношение к этому опыту.

Надо сказать, что роль руководителя исключительно важна именно на начальном этапе работы молодого научного работника. При этом неважно, называется ли молодой человек студентом-дипломником, стажером-исследователем, аспирантом или младшим научным сотрудником. Особое значение на этом этапе имеет постановка задачи исследования. Именно в ней концентрируется накопленный руководителем опыт, его понимание сути дела, проявляется его интуиция и, если хотите, его прозорливость. В момент постановки задачи и на первых шагах ее исследования руководитель, кроме того, обладает бóльшим объемом конкретных знаний по разрабатываемой теме, чем молодой исследователь. Но если дело поставлено правильно, если руководитель воспитывает в молодом человеке самостоятельность, а тот ее проявляет, то к моменту решения задачи именно он обладает наибольшим объемом конкретных знаний по этой проблеме. Долг руководителя — активно интересоваться ходом выполнения исследования, тщательно смотреть за стилем и характером работы молодого исследователя и аккуратно направлять его усилия.

Здесь снова встает вопрос об авторитете и самостоятельности. Нельзя слепо следовать первоначально поставленной задаче. Исследование, процесс познания закономерностей объективного мира, процесс открытия новых явлений имеет свою собственную логику. При проведении фундаментальных исследований и опытный руководитель, и творчески одаренный молодой исследователь должны следовать этой логике познания, не отбрасывать новые возможности, неожиданно возникающие при проведении исследования, смело идти новыми путями, казалось бы уводящими в сторону от первоначально поставленной цели.

Прекрасным примером правильного сочетания такта руководителя и упорства исследователя является открытие С. И. Вавиловым и П. А. Черенковым явления, получившего впоследствии название эффекта Черенкова. Задача была поставлена С. И. Вавиловым в плане исследования люминесценции жидкостей под воздействием быстрых электронов. Очень скоро было выяснено, что имеется слабое свечение, которое не является примесной люминесценцией, да и вообще не является люминесценцией вещества под воздействием электронов. Казалось бы, исследования надо было прекратить. С точки зрения поставленной задачи работа зашла в тупик. Но П. А. Черенков проявил упорство и самостоятельность мышления. Так новое слабое явление было превращено в сильный эффект, играющий, как это хорошо известно, крайне важную роль в современной физике. Надо сказать, что произошло все это при полной поддержке академика С. И. Вавилова — руководителя аспирантской работы П. А. Черенкова.

Очень часто исследователю в своей работе приходится преодолевать такое психологическое явление, которое можно назвать авторитетом общественного мнения, нередко играющим консервативную роль. Это самое труднопреодолимое препятствие. Только ученый, умеющий самостоятельно мыслить, выработавший в себе, в том числе и под влиянием опытного и тактичного учителя, способность формировать свое собственное мнение и умение это мнение отстаивать, может успешно преодолевать такое препятствие.

Великолепным примером является создание академиком П. Л. Капицей и внедрение им в производство турбодетандерного ожижителя. Все специалисты по машинам глубокого охлаждения, все зарубежные фирмы, работающие в этой области, отвергали идею П. Л. Капицы просто как несерьезную. Только упорство, настойчивость, талант физика-экспериментатора и инженера, глубокое понимание физики процессов, играющих крайне важную роль при ожижении газов, позволили П. Л. Капице полностью решить поставленную проблему.

Приведенные яркие примеры относятся к работам, удостоенным Нобелевских премий по физике. Это выдающиеся работы, и именно поэтому они привлечены в качестве наглядных примеров для иллюстрации простой мысли: плодотворная научная работа немыслима без самостоятельного мышления, и учиться этому надо смолоду.

Надо сказать, что роль руководителя не исчерпывается постановкой задачи и направлением работы молодого исследователя. Точно так же молодой человек должен не только упорно работать над поставленной задачей, воспринимая опыт старших и развивая только свою самостоятельность. Современная исследовательская работа носит по большей части коллективный характер. Научно-исследовательская работа осуществляется в больших лабораториях, часто работа идет над многими разными темами, связанными, однако, общей большой «сверхзадачей». И здесь крайне важно развивать дух доброжелательства и товарищеской взаимопомощи, уметь радоваться успехам друг друга, поддерживать и ободрять друг друга, критиковать друг друга, имея прежде всего в виду пользу дела, уметь слушать критику и правильно воспринимать ее. Всему этому надо учиться.

Роль авторитетного руководителя в создании и сохранении такой подлинно творческой обстановки в коллективе трудно переоценить. С другой стороны, именно молодые исследователи составляют бо́льшую и, в силу своей молодости, перспективную часть коллектива. Поэтому их моральный уровень в значительной мере определяет моральный климат коллектива. В вопросах нравственного воспитания коллектива авторитет настоящего руководителя должен быть непререкаемым.

Надо сказать, что крайне эффективно коллективизм и правильная система оценок воспитываются на научных семинарах. Руководитель должен так вести семинар, делая это не навязчиво, но строго, чтобы молодежь на деле видела доброжелательность и поддержку нового, принципиальность и объективность, высокую требовательность и конструктивность критики. С другой стороны, именно на семинарах научная молодежь должна учиться не замыкаться только в своей задаче, только в себе, должна учиться приобретать широту взглядов и кругозор, должна обогащать свой опыт опытом товарищей.

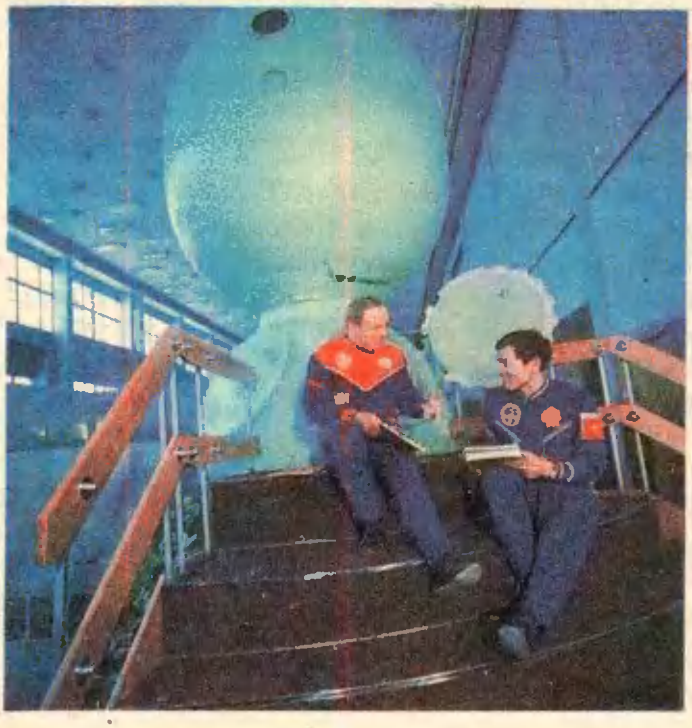
Сказанное относится к тем сторонам становления личности ученого, которые прямо связаны отношениями учитель — ученик. В этих отношениях большое значение имеют авторитет учителя и самостоятельность ученика.

Говоря кратко, авторитет учителей и самостоятельность их учеников необходимы и для старших и для младших, для успешной работы всего научно-исследовательского коллектива в целом.

МЕЖДУНАРОДНЫЕ КОСМИЧЕСКИЕ ЭКИПАЖИ

1

2



3

4

5

Наш фотоочерк посвящен трем международным космическим экипажам, которые в 1980 году работали на гостеприимной советской космической станции «Салют-6», пилотируемой Леонидом Поповым и Валерием Рюминым. В состав этих экипажей входили Валерий Кубасов и венгерский космонавт Берталан Фаркаш (26 мая — 3 июня), Виктор Горбатко и вьетнамский космонавт Фам Туан (23 июля — 31 июля), Юрий Романенко и кубинский космонавт Арнальдо Тамайо Мендес (18 сентября — 26 сентября).

Советский Союз еще в 1976 году выдвинул идею совместных полетов международных космических экипажей социалистических стран. Дружеская помощь наших специалистов обеспечила успешную ускоренную подготовку зарубежных космонавтов.

В результате выполнения обширной программы научно-технических исследований, разработанной совместно учеными Советского Союза и социалистических стран, получено много ценной информации, которая принесет огромную помощь науке и народному хозяйству стран социалистического содружества.

Фото 1. Валерий Кубасов и **Берталан Фаркаш около тренажера космической станции «Салют».**

Фото 2. Виктор Горбатко и Фам Туан в зале тренажеров.

Фото 3. Юрий Романенко и Арнальдо Тамайо Мендес отрабатывают приводнение.

Фото 4. Леонид Попов и **Валерий Рюмин возле стыковочного узла.**

Фото 5. Встреча в Звездном. С букетом цветов Арнальдо Тамайо Мендес.

В. Лешковцев

Фото А. Моклецова

Малый интеркосмос

Центральный Комитет ВЛКСМ, Академия наук СССР, Министерство просвещения СССР, Государственный комитет СССР по профессионально-техническому образованию и Всесоюзное общество «Знание» совместно с Федерацией космонавтики СССР и Выставкой достижений народного хозяйства СССР проводят с февраля по ноябрь 1981 года Всесоюзный конкурс учащихся школ и профтехучилищ на лучший проект космического эксперимента, посвященный 20-летию со дня полета Ю. А. Гагарина. Конкурс носит название «Малый интеркосмос». Он проводится в целях дальнейшего развития познавательной активности, фантазии, углубления общественно полезной направленности научно-технического творчества учащихся, подготовки их к труду, пропаганды среди школьников и учащихся ПТУ достижений Советского Союза и стран социалистического содружества в освоении космического пространства.

В конкурсе могут участвовать как отдельные учащиеся, так и коллективы юных любителей науки и техники школ, ПТУ, внешкольных учреждений, научных обществ учащихся, клубов по месту жительства и др.

Задача участников конкурса — предложить технические средства, эксперименты и исследования, которые представляют интерес для специалистов и могут быть реализованы в ближайшие годы.

Участники конкурса могут разработать и предложить:

— научные эксперименты, с помощью которых можно получить новые знания в астрономии, физике, химии, биологии, медицине, географии, геофизике и других науках;

— технические эксперименты и предложения, направленные на усовершенствование имеющейся космической техники (применение новых узлов и приборов, улучшение условий работы и жизни космонавтов на станции, организация их досуга), на создание новых систем выведения на орбиту, систем энергетики и связи, транспортных средств для перемещения космонавтов и грузов в открытом космосе и на небесных телах, а также на использование в космосе применяемых на Земле приборов и устройств;

— технологические эксперименты, которые могут быть поставлены только в специфических условиях космического пространства (невесомость, уменьшенная сила тяжести, вакуум, радиация). К этой группе относятся эксперименты, направленные на создание в космосе промышленных производств (сварка металлов, выращивание кристаллов, получение сплавов);

— прикладные эксперименты, связанные с использованием возможностей космонавтики для решения народнохозяйственных задач. Например, геологоразведка, сельское и лесное хозяйство, связь, навигация, охрана окружающей среды, метеорология. К этой группе можно отнести предложения по использованию на Земле достижений космической техники.

На конкурс могут быть представлены:

— идеи создания новой космической техники, проведения экспериментов или исследований с обоснованием их ценности и целесообразности; разработанные технические предложения или эскизные проекты с чертежами и описаниями; модели, макеты, приборы, конструкции экспериментальных устройств и систем с необходимыми пояснениями.

К участию в конкурсе допускаются проекты, которые могут быть реализованы в кабине пилотируемого и беспилотного космического аппарата, в открытом космосе, на поверхности планет или других небесных тел, проекты наземных устройств, связанных с космонавтикой, предложения по использованию в земных условиях средств, применяемых сейчас только в условиях космоса.

Все работы представляются непосредственно Центральному оргкомитету до 20 сентября 1981 года. Предложения по проведению технических экспериментов, краткие характеристики и фотографии макетов, моделей, приборов направляются на Центральную станцию юных техников Министерства просвещения РСФСР (103055, Москва, ул. Тихвинская, дом 39). Идеи и проекты научных, прикладных, технологических экспериментов — в Московский городской Дворец пионеров и школьников (117334, Москва, Воробьевское шоссе, дом 11). Если наряду с изложением идеи научного эксперимента изготовлен и макет соответствующего прибора, описание прибора высылается вместе с изложением идеи.

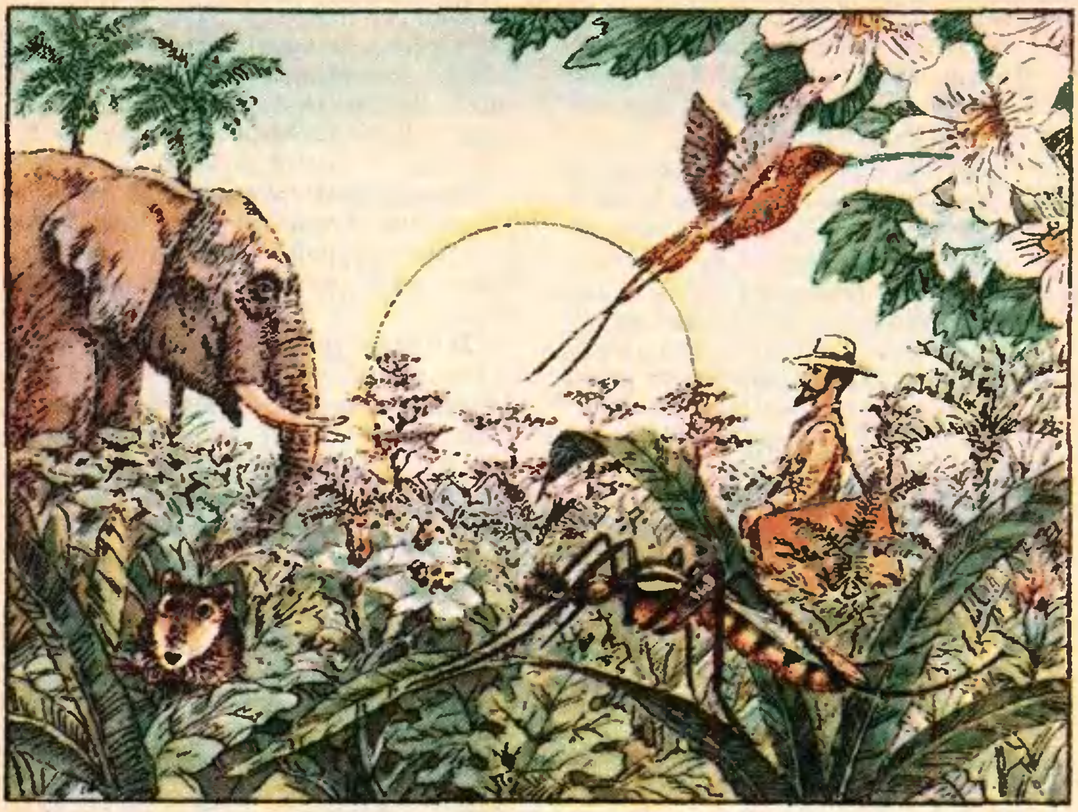
Работу следует оформить так, чтобы ее можно было демонстрировать на выставке. Это может быть альбом, тетрадь с приложенными к ней чертежами, фотографии макета или модели с пояснительным текстом.

Необходимо указать фамилию, имя, отчество, место жительства и занятий автора (класс и номер школы, курс ПТУ, кружок внешкольного учреждения, секция научного общества), кто был руководителем или консультантом работы.

Авторы лучших работ будут приглашены в Москву на заключительный этап конкурса, проводимый в ноябре 1981 года. Наиболее интересные предложения, пригодные для реализации на современном этапе, будут включены в программу космических исследований, а также для демонстрации на ВДНХ СССР.

Все участники заключительного этапа будут награждены дипломами участника и значками. Для них будут организованы экскурсии в Звездный городок, Музей космонавтики, встречи с космонавтами и учеными. По каждому из направлений конкурса определяются по 3 лауреата. Они будут награждены именными призами Ю. А. Гагарина, К. Э. Циолковского, С. П. Королева, М. В. Келдыша, вымпелами и значками, побывавшими в космосе.

(Окончание см. на с. 42)



В. Ланге, Т. Ланге

Об удельной мощности человека и Солнца

(или почему у комара «холодная кровь»)

Поток энергии, идущей от Солнца, колоссален. Из геофизических измерений следует, что даже в верхних слоях атмосферы Земли, на громадном расстоянии почти в 150 миллионов километров от Солнца, каждый квадратный метр, расположенный перпендикулярно солнечным лучам, получает от Солнца ежесекундно 1,4 кДж. Эту величину называют солнечной постоянной и обычно обозначают буквой I. Зная, что $I = 1{,}4$ кДж/(м^2 · с) $= 1{,}4$ кВт/м^2, нетрудно найти полную мощность излучения Солнца P_1*). Для этого достаточно умножить солнечную постоянную на площадь сферы, описанной вокруг Солнца, с радиусом $R = 150\,000\,000$ км:

$$P_1 = I \cdot 4\pi R^2 \approx 4 \cdot 10^{26}\,\text{Вт}.$$

Конечно, энергетические возможности человека во много раз скромнее. Среднюю мощность P_2, развиваемую человеком, можно довольно точно оценить по калорийности пищи, потребляемой им в сутки. Как известно, лица, не занимающиеся тяжелым физическим трудом, должны получать с пищей ежедневно примерно 12 МДж. Почти вся эта энергия идет на поддержание постоянной температуры человеческого тела и в конечном счете генерируется человеком в окружающее пространство. (Лишь очень малую часть получаемых 12 МДж человек

---

*) P_1 называют также полным потоком энергии Солнца. Тогда I можно определить как плотность потока солнечной энергии на расстоянии от Солнца, равном радиусу орбиты Земли.

расходует на совершение механической работы). Разделив 12 МДж на длительность суток (86 400 с), получим

$$P_2 \approx 140 \text{ Вт}.$$

Таким образом, как генератор энергии Солнце примерно в $3 \cdot 10^{24}$ раз мощнее человека. Тем неожиданнее результат сравнения их удельных (то есть приходящихся на единицу массы) мощностей. Масса M Солнца составляет около $2 \cdot 10^{30}$ кг, массу m человека примем равной 80 кг. Тогда

$$P_1 : M = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Вт/кг},$$
$$P_2 : m = 1{,}75 \text{ Вт/кг}$$

— удельная мощность человека оказывается почти в 10 000 раз больше, чем у Солнца!

Результат, к которому мы пришли, кажется на первый взгляд совершенно неправдоподобным. Однако так и есть на самом деле.

Как же объясняется этот «парадокс»? Почему Солнце — этот гигантский термоядерный реактор — проигрывает по удельной мощности человеку, энергию которому поставляют химические реакции, куда более «слабосильные», чем ядерные?

Ответ на этот вопрос нетрудно получить, если принять, что тепло в человеческом теле и в Солнце выделяется более или менее равномерно по всему объему. Следовательно, скорость выделения тепла прямо пропорциональна объему тела, иными словами — кубу линейного размера. Скорость же теплоотдачи пропорциональна площади поверхности тела, то есть квадрату линейного размера. Стало быть, чем больше тело, тем меньшей может быть скорость выделения тепла, необходимая для поддержания некоторой заданной температуры.

Объем Солнца — порядка 10^{27} м^3, площадь его поверхности $\sim 10^{18}$ м^2. Соответствующие параметры тела человека — $\sim 10^{-1}$ м^3 и ~ 1 м^2. Таким образом, отношение объемов Солнца и человека равно $\sim 10^{28}$, а отношение площадей поверхностей этих тел — порядка 10^{18}. Образно говоря, на единицу объема Солнца приходится приблизительно в 10 миллиардов раз меньше свободной поверхности, чем у человека. Поэтому не удивительно, что, несмотря на то, что солнечный «обмен веществ» протекает со скоростью всего лишь 0,2 мВт/кг, температура на поверхности Солнца достигает 6000 градусов.

Проиллюстрируем связь между размерами, темпом энерговыделения и температурой тел следующими примерами из жизни животного мира.

Температуры тел млекопитающих отличаются не особенно сильно. В частности, они примерно одинаковы и у слона, и у маленькой полевой мышки. Однако скорость выделения тепла в организме слона примерно в 30 раз меньше. Если бы внутри тела слона выделение тепла происходило с такой же скоростью, как у мыши, то выделяющееся тепло не успевало бы покинуть организм слона достаточно быстро, чтобы сохранилась нормальная температура, и слон бы «зажарился» в собственной шкуре.

Чем меньше теплокровное животное,тем больше должна быть удельная (то есть в расчете на единицу массы) скорость выделения тепла, чтобы скомпенсировать потери и поддержать температуру тела, обеспечивающую нормальную жизнедеятельность организма, тем больше пищи (опять-таки в расчете на единицу массы) оно должно поглощать. Мальчик-с-пальчик из широко известной детской сказки должен быть ужасно прожорлив: при одинаковых пропорциях с нормальным человеком ему требовалось бы на 1 кг массы в 20 раз больше пищи.

Самые маленькие млекопитающие на Земле — этрусские мыши — имеют массу всего 1,5 г, а съедают за сутки в два раза больше. Если этрусскую мышь оставить без пищи хотя бы на несколько часов, она погибнет. Практически весь период бодрствования заняты поисками и поглощением еды колибри (крошечные птички с массой около 2 г, обитающие в Южной Америке). Длительный ночной перерыв в этом занятии колибри могут переносить только потому, что температура их тела на это время резко понижается.

Можно показать, что очень маленькие существа, комар например, не могут быть теплокровными.

Для простоты будем считать, что комар имеет форму цилиндра с диаметром $d=0{,}5$ мм и длиной $l=4$ мм. В таком случае площадь поверхности S и объем V его тела равны соответственно

$$S=2\frac{\pi d^2}{4}+\pi dl\approx 10^{-5}\text{м}^2,$$

$$V=\frac{\pi d^2}{4}l\approx 10^{-9}\text{м}^3.$$

Оценим мощность, «генерируемую» комаром.

Тело, имеющее температуру T, передает в окружающее пространство, где температура T_0 ($T_0<T$), тепловую мощность

$$P=\alpha S\cdot\Delta T.$$

Если тепло передается за счет излучения, а разность температур $\Delta T=T-T_0$ мала по сравнению с температурой T, то коэффициент α пропорционален T^3; при комнатных температурах $\alpha\approx 2\div 5$ Вт/(м^2 · град) (в зависимости от отражательной способности тела).

Предположив, что температура тела комара 30°C ($T=303$ K), и взяв $\alpha=4$ Вт/(м^2 · град), найдем, что при температуре окружающей среды 17°C($T_0=290$ K) комар излучает тепловую мощность

$$P\approx 10^{-3}\text{ Вт}.$$

Приняв плотность вещества тела комара равной плотности воды, найдем массу комара: $m\approx 10^{-6}$ кг. Стало быть, удельная мощность комара составляет 10^{-3} Вт/10^{-6} кг $=10^3$ Вт/кг, то есть примерно в 600 раз больше, чем у человека (и в 6 миллионов раз больше, чем у Солнца!).

Если человек поглощает в сутки около 1 кг пищи, то есть примерно 1/80 часть от своей массы, то масса пищи комара должна бы превышать его собственную в 600/80=7,5 раза. (Фактически мы получаем заниженные цифры, так как при оценке не учитывалось тепло, отдаваемое за счет конвекции.) Температура окружающего воздуха чаще оказывается значительно ниже 17°C; а при 7°C (обычные комары достаточно активны и в этих условиях) энергозатраты возрастают почти в 2 раза, и поглощать пищи комару пришлось бы уже в 15 раз (!) больше своей массы. Поэтому ясно, что поддерживать постоянной температуру своего тела (то есть быть теплокровным) комар не может.

Рассматривая связь между линейными размерами тела и интенсивностью энергообмена с окружающей средой, легко получить ответ и на такой интересный вопрос: почему тонкую проволоку можно расплавить в пламени спички, а толстую трудно раскалить даже от газовой плиты?

Поток энергии, которую получает проволока от огня, прямо пропорционален площади ее боковой поверхности $S=2\pi Rl$ (R — радиус проволоки, l — длина ее части, находящейся в пламени). В то же время скорость отвода тепла вдоль оси проволоки к ее холодным концам (которые не попадают в пламя) прямо пропорциональна площади поперечного сечения проволоки $S=\pi R^2$.

Если радиусы двух проволок отличаются в 10 раз, то при прочих равных условиях более толстая проволока будет получать за единицу времени в 10 раз больше тепла, чем тонкая, но терять она будет в 100 раз больше. Ясно, что температура толстой проволоки в равновесном состоянии (когда оба тепловых потока — к проволоке и от нее — сравняются) окажется заметно меньше.

И. Яглом

Соединим две точки отрезком

Древние греки под математикой понимали в первую очередь геометрию. Например, алгебраическое равенство $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ они доказывали с помощью чертежа (рис. 1). Сегодня математика, напротив, стремительно алгебраизируется — алгебра в своих отношениях с геометрией берет реванш. В последние годы изложение геометрии чаще всего основывают на тех или иных исчислениях (например, на векторном исчислении). Об одном из этих исчислений, очень простом, но неожиданном, пойдет речь в статье.

Умножение точек и фигур

Отрезок с концами A и B часто обозначается символом AB (рис. 2). Эта запись подсказывает неожиданную терминологию: отрезок AB назовем *произведением точек* A и B. Аналогично *произведением* $\alpha\beta$ *фигур* α и β мы назовем объединение всех отрезков AB, где $A\in\alpha$, $B\in\beta$, то есть объединение всевозможных произведений точек фигуры α на точки фигуры β (рис. 3). Мы уверены, что никто не спутает это неожиданное произведение точек и фигур с обычным произведением чисел.

Каковы же свойства такого умножения точек? Первые из них очевидны:

(a) *Умножение точек коммутативно:*

$$AB=BA$$

для любых точек A *и* B.

(b) *Умножение точек ассоциативно:*

$$(AB)C=A(BC)$$

для любых точек A, B *и* C.

В самом деле, произведение $(AB)C$ представляет собой объединение всех отрезков, соединяющих точки отрезка AB с точкой C (рис. 4,*а*), а произведение $A(BC)$ — объединение отрезков, соединяющих A с точками отрезка BC (рис. 4,*б*). Таким образом, $(AB)C=A(BC)=ABC$, где ABC — треугольник с вершинами A, B, C.

Здесь нам будет удобно объединение фигур α и β называть также их *суммой*; соответственно, вместо $\alpha\cup\beta$ мы будем писать $\alpha+\beta$.

(c) *Умножение точек дистрибутивно относительно их сложения:*

$$(A+B)C=AC+BC$$

для любых точек A, B *и* C.

Это ясно, так как произведение пары точек $A+B$ на точку C является объединением отрезков AC и BC (рис 5)

Следующее свойство умножения точек уже отличается от привычных нам свойств умножения чисел:

(d) *Умножение точек идемпотентно:*

$$AA=A$$

для любой точки A.

Действительно, отрезок AA со слившимися концами — это просто точка A.

Свойства (a) — (c) умножения точек переносятся и на произвольные фигуры:

(A) *Умножение фигур коммутативно:*

$$\alpha\beta=\beta\alpha.$$

(B) *Умножение фигур ассоциативно:*

$$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma).$$

Фигуру $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$ уместно обозначить через $\alpha\beta\gamma$; она представляет собой объединение всевозможных треугольников ABC, где $A\in\alpha$, $B\in\beta$, $C\in\gamma$.

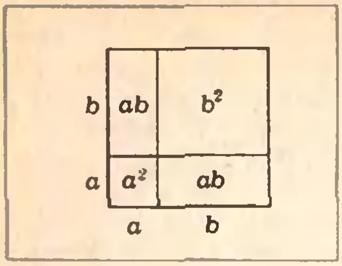


Рис. 1.

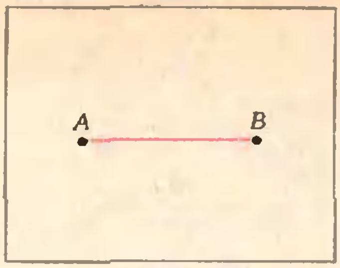


Рис. 2.

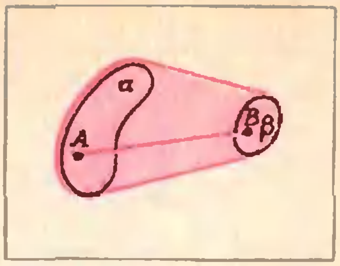


Рис. 3.

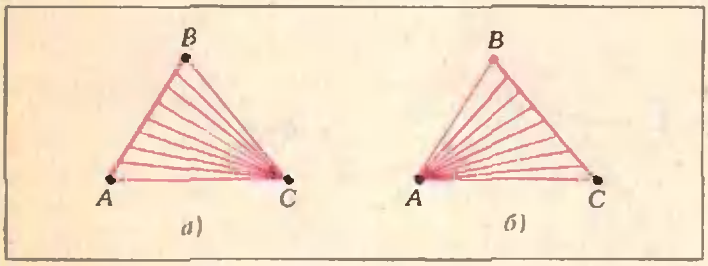


Рис. 4.

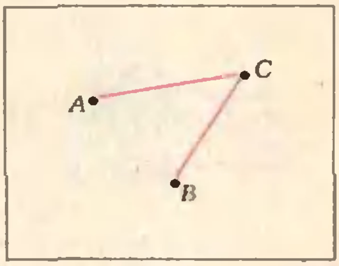


Рис. 5.

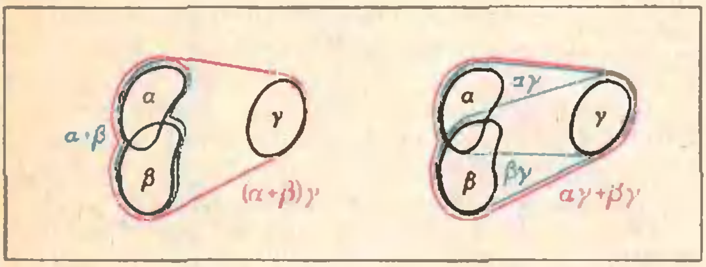


Рис. 6.

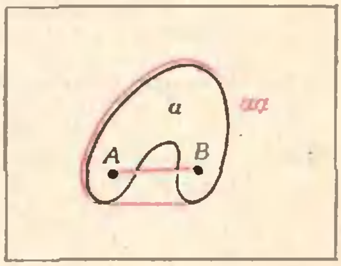


Рис. 7.

(C) *Умножение фигур дистрибутивно относительно их сложения:*

$$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$$

(рис. 6).

Однако идемпотентность умножения фигур места, вообще говоря, не имеет. Можно утверждать лишь, что

(D) *Произведение любой фигуры на себя содержит эту фигуру:*

$$\alpha\alpha\supset\alpha.$$

Рисунок 7 показывает, что фигура $\alpha\alpha$ может не совпадать с α. Более того, нетрудно видеть, что для любой фигуры α

$$\alpha^n\subset\alpha^{n+1},$$

где под α^n, как обычно, понимается произведение $\underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{n\text{ раз}}$.

Упражнения

1. Пусть A, B, C и D — произвольные точки (плоскости или пространства). Докажите, что

$$(AB)(CD)=(AD)(BC)=$$
$$=(AC)(BD)=A(BCD)=B(ACD)=$$
$$=C(ABD)=D(ABC).$$

Что представляет собой это произведение четырех точек (его можно обозначить просто через $ABCD$ без скобок)?

2. Докажите, что $(AB)(AC)=ABC$.

3. Что представляют собой фигуры а) $(A+B)(A+C)$; б) $(A+B)(C+D)$; в) $(A+B+C)D$; г) $(A+B+C)(D+E)$? (В задачах б) — г) отдельно рассмотрите случаи, когда все точки принадлежат одной плоскости и когда это произвольные точки пространства.)

4. Что представляет собой произведение а) точки и круга; б) точки и окружности; в) точки и треугольника; г) точки и контура треугольника; д) точки и квадрата; е) двух кругов; ж) двух треугольников; з) двух квадратов; и) круга и квадрата?

5. Что представляет собой произведение двух прямых, если эти прямые а) параллельны; б) пересекаются; в) скрещиваются?

Когда $\underline{\alpha\alpha=\alpha}$

В арифметике и в алгебре особую роль играют те числа, для которых $a\cdot a=a$. Ясно, что этим свойством обладают лишь замечательные и во многих других отношениях числа 1 и 0.

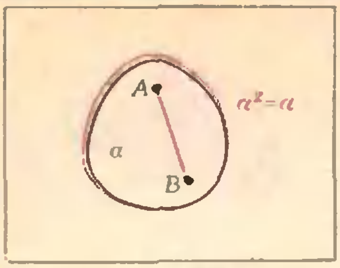


Рис. 8.

Рис. 9.

Рис. 10.

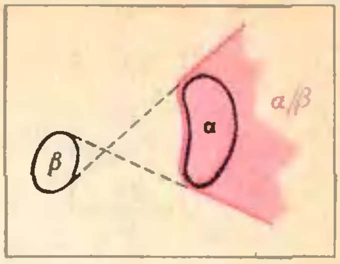


Рис. 11.

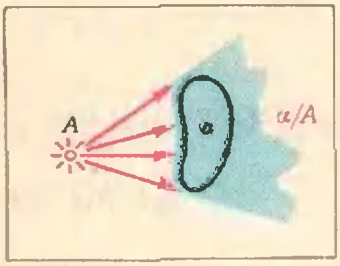


Рис. 12.

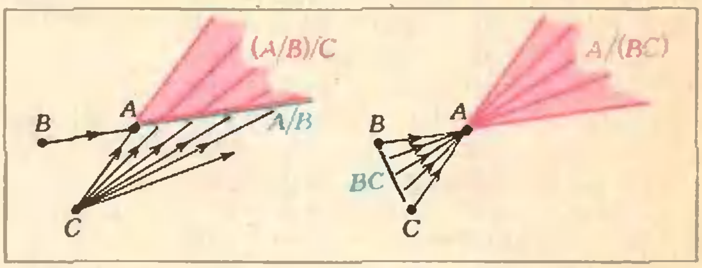


Рис. 13.

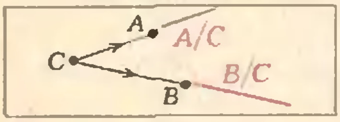


Рис. 14.

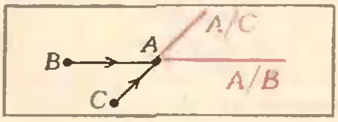


Рис. 15.

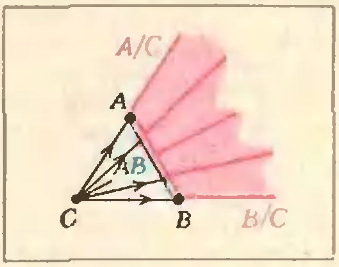


Рис. 16.

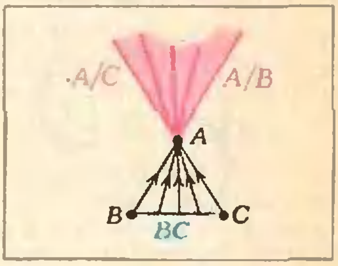


Рис. 17.

В геометрии также интересно специально рассмотреть такие фигуры α, для которых $α^2 = αα = α$. Каждая такая фигура характеризуется тем, что ей принадлежит любой отрезок, соединяющий две точки этой фигуры (рис. 8). Такие фигуры, как вы знаете, называются *выпуклыми*.

Определению выпуклой фигуры можно придать также следующую элегантную форму: множество точек α называется *выпуклым*, если оно замкнуто относительно операции умножения точек, то есть, наряду с любыми двумя точками A и B, фигуре α принадлежит и произведение AB этих точек.

Легко придумать плоскую фигуру β, для которой фигура $β^2$ не выпуклая. Можно доказать, что для любой плоской фигуры β фигура $β^3$ является выпуклой; она представляет собой наименьшую выпуклую фигуру, содержащую β, и называется *выпуклой оболочкой* фигуры β. Для фигуры β, расположенной в трехмерном пространстве, выпуклой оболочкой будет $β^4$.

Вообще, для любой фигуры β, расположенной в n-мерном евклидовом пространстве, фигура $β^{n+1}$ выпукла, и потому все фигуры $β^{n+2}$, $β^{n+3}$,... совпадают с $β^{n+1}$.

Теория выпуклых фигур занимает сегодня в математике видное место.

Упражнения

6. Докажите, что произведение двух выпуклых фигур выпукло.

7. Что представляют собой фигуры

$β^2$; $β^3$; $β^n$,

если β — объединение: а) трех точек плоскости; б) четырех точек пространства; в) вершин правильного пятиугольника; г) окружности и точки, которая не лежит в плоскости окружности и ортогонально проектируется в ее центр.

Где умножение, там и деление

В области чисел деление определяется как операция, обратная умножению: число q называется *частным* чисел a и b (запись: $q = a/b$), если a

есть произведение b и q. Другими словами, записи $q=a/b$ и $a=bq$ имеют один и тот же смысл. Аналогично этому и операцию деления точек мы введем как обратную для их умножения: если $A\neq B$, то через A/B обозначим множество точек Q, для которых $A\in BQ$; положим еще, по определению, $A/A=A$.

В силу определения умножения точек условие $A\in BQ$ означает, что A принадлежит отрезку BQ (рис. 9); таким образом, точка $Q\in A/B$ лежит на проходящей через A и B прямой и расположена по другую сторону от A, чем точка B. Итак, *частное* A/B *двух точек* — это луч с началом A, продолжение которого проходит через B. Можно также сказать, что A/B — это тень, отбрасываемая «колышком» A, освещенным «фонарем» B (рис. 10).

Частное α/β *двух фигур* α и β мы определим как объединение всех лучей A/B, где $A\in\alpha$, $B\in\beta$, то есть объединение всевозможных частных точек фигуры α на точки фигуры β (рис. 11). Например, если A — точка, то α/A — это тень, отбрасываемая фигурой α, освещенной «фонарем» A (рис. 12).

Как легко видеть (см. рис. 13—17), для каждых трех точек A, B и C справедливы следующие соотношения (первые два из них похожи на свойства чисел):

$$(A/B)/C=A/(BC),$$
$$(A+B)/C=(A/C)+(B/C),$$
$$A/(B+C)=(A/B)+(A/C),$$
$$(AB)/C=(A/C)(B/C)$$
$$A/(BC)=(A/B)(A/C).$$

Ясно, что для любой фигуры α справедливо включение $\alpha/\alpha\supset\alpha$. Особый интерес представляют такие фигуры λ, для которых $\lambda/\lambda=\lambda$. Такие фигуры мы назовем *линейными* (см. упр. 18).

Упражнения

8. Что представляют собой фигуры А) $(ABC)/D$; б) $(AB)/(CD)$; в) $A/(BCD)$?

9. Что представляют собой фигуры

$$\alpha/\alpha;\ (\alpha/\alpha)/\alpha;\ [(\alpha/\alpha)/\alpha]/\alpha;\ldots,$$

если α — объединение трех точек, не лежащих на одной прямой?

10. Запишите с помощью операций умножения и деления точек области, на которые

а) две точки A и B делят прямую;

б) три прямые, соединяющие попарно точки A, B и C, делят плоскость;

в) четыре плоскости, соединяющие по три данные точки A, B, C и D, делят пространство.

В упр. 11—13 приняты такие обозначения: A — точка; λ, λ_1, λ_2 — прямые; π, π_1, π_2 — плоскости; σ, σ_1, σ_2 — окружности; $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — круги; τ, τ_1, τ_2 — треугольники.

11. Что представляют собой фигуры а) A/λ; б) λ/A; в) A/π; г) π/A д) A/σ; е) σ/A; ж) $A/\varkappa$; з) $\varkappa/A$; и) A/τ; к) τ/A; л) λ/π; м) π/λ?

12. Что представляют собой фигуры а) σ_1/σ_2; б) $\varkappa_1/\varkappa_2$; в) τ_1/τ_2; г) λ_1/λ_2; д) π_1/π_2?

В упр. г) отдельно рассмотрите случаи, когда λ_1 и λ_2 пересекаются; параллельны; скрещиваются.

13. Что представляют собой фигуры а) σ/σ; б) $\varkappa/\varkappa$; в) τ/τ; г) λ/λ; д) π/π?

14. Докажите, что для любых точек A, B, C, D справедливы соотношения

а) $A(B/C)\subset(AB)/C$; б) $A/(B/C)\subset(AC)/B$;
в) $(A/B)(C/D)\subset(AC)/(BD)$;
г) $(A/B)/(C/D)\subset(AD)/(BC)$.

(Аналогичные свойства справедливы и для произвольных фигур.)

15. Докажите, что для любых фигур α, β, γ

а) $(\alpha\cap\beta)/\gamma\subset(\alpha/\gamma)\cap(\beta/\gamma)$;
б) $\alpha/(\beta\cap\gamma)\subset(\alpha/\beta)\cap(\alpha/\gamma)$.

16. Докажите, что для любых фигур α, β, γ

а) $(\alpha/\beta)/\gamma=\alpha/(\beta\gamma)$; б) $(\alpha+\beta)/\gamma=(\alpha/\gamma)+(\beta/\gamma)$; в) $\alpha/(\beta+\gamma)=(\alpha/\beta)+(\alpha/\gamma)$; г) $(\alpha\beta)/\gamma=(\alpha/\gamma)(\beta/\gamma)$; д) $\alpha/(\beta\gamma)=(\alpha/\beta)(\alpha/\gamma)$.

17. Докажите, что линейная фигура обязательно выпукла.

18. Докажите, что все линейные фигуры плоскости исчерпываются точками, прямыми и всей плоскостью; в пространстве линейными фигурами являются точки, прямые, плоскости и все пространство.

19. Условимся писать $\alpha\approx\beta$, если у фигур α и β есть хотя бы одна общая точка (для сравнения заметим, что $\alpha=\beta$, если у α и β все точки общие).

Докажите, что выполняется следующее изящное правило пропорции: если фигуры α, β, γ, δ таковы, что $\alpha/\beta\approx\gamma/\delta$, то $\alpha\delta\approx\beta\gamma$ (рассмотрите сначала случай, когда α, β, γ, δ — точки; рис. 18). Докажите также, что $\alpha/\beta\approx\gamma\Leftrightarrow\beta\gamma\approx\alpha$.

«Не евклидово» умножение точек и фигур

Содержание данной статьи базируется на недавних исследованиях американского геометра Вальтера Пенровица. Идея исследований Пенровица (вовсе не рассчитанных на начинающих математиков, какими являются читатели этого журнала) состояла в рассмотрении широкого класса новых «геометрий», отличных от привычной вам «школьной» гео-

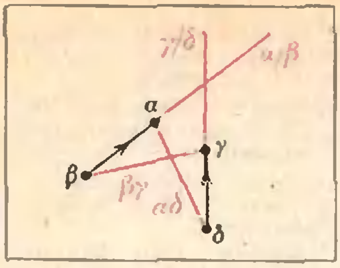


Рис. 18.

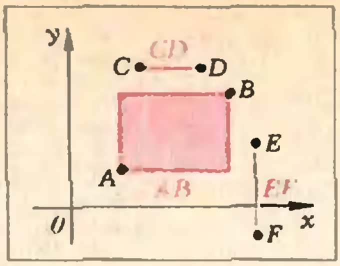


Рис. 19.

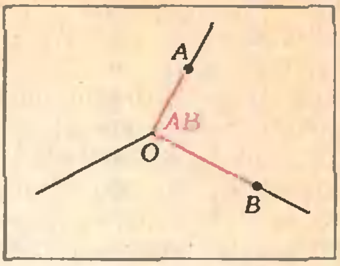


Рис. 20.

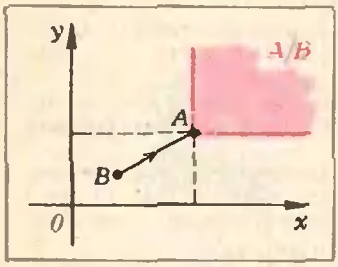


Рис. 21.

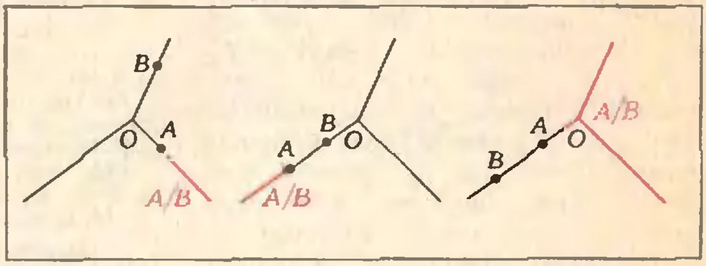


Рис. 22.

метрии Евклида; эти геометрии можно назвать «не евклидовыми» геометриями. Вот два примера «не евклидова умножения точек» по Пенровицу:

I. *Произведением AB точек A* и *B* на координатной плоскости назовем прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, «натянутый» на *A* и *B* (рис. 19); если прямая, проходящая через точки *A* и *B*, параллельна какой-нибудь из осей координат, то прямоугольник вырождается в отрезок и произведение *AB* совпадает, по определению, с тем произведением, которое мы определяли раньше.

II. Фиксируем фигуру П, образованную тремя выходящими из одной точки *O* лучами (рис. 20). Эта фигура будет нашим «универсумом»: будем рассматривать далее только точки, принадлежащие П, и фигуры, являющиеся подмножествами множества П. Под *произведением AB точек* $A \in П$ и $B \in П$ условимся понимать кратчайшую ломаную, соединяющую *A* и *B* внутри фигуры П.

После того как определено *произведение точек*, дословно так же, как и раньше, последовательно определяются *произведение фигур*, *выпуклая фигура*, *частное точек*, *частное фигур*, *линейная фигура*. На рисунке 21 изображено частное точек *A*/*B* для примера I, на рисунке 22 — частное *A*/*B* для примера II (при различных расположениях точек *A* и *B*).

Оказывается теория выпуклых фигур в «геометриях Пенровица» имеет очень много общего с соответствующей теорией в обычной евклидовой геометрии.

Упражнения

20. Проверьте, что произведение *AB* и частное *A*/*B* точек для примера I удовлетворяют всем свойствам, перечисленным в основной части статьи и в упражнениях. Какие фигуры являются в этой «геометрии» выпуклыми? Какие — линейными?

21. То же для примера II.

Редакционная коллегия журнала «Квант» с глубоким прискорбием извещает читателей о безвременной кончине члена редакционной коллегии известного советского математика члена-корреспондента АН СССР Анатолия Илларионовича Ширшова, последовавшей 28 февраля 1981 года.

Н. Вагутен

Формула площади

В этой статье мы обсудим полезную формулу, выражающую площадь многоугольника через координаты его вершин. При подготовке статьи использовано письмо А. Старцева, присланное в «Квант» в 1970 году (когда автор был еще школьником).

Комбинации трапеций

Пусть дан многоугольник, расположенный в положительном квадранте $x>0$, $y>0$ и к тому же выпуклый. Занумеруем его вершины против часовой стрелки: $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$, ..., как показано на рисунке 1, где число вершин $n=5$. Опустим из всех вершин перпендикуляры A_1H_1, A_2H_2, ..., A_nH_n на ось x; их длины равны y_1, y_2, ..., y_n.

Площадь трапеции $A_kH_kH_{k+1}A_{k+1}$ равна модулю произведения $(y_k+y_{k+1})(x_k-x_{k+1})/2$. Это произведение положительно при $x_k>x_{k+1}$ и отрицательно при $x_k<x_{k+1}$ (здесь k — одно из чисел 1, 2, ..., n, причем следующий за n номер $n+1$ надо заменить на 1). Замечательным образом оказывается, что сумма всех n таких однотипных произведений как раз равна площади многоугольника $A_1A_2...A_n$. Например, для пятиугольника на рисунке 1 из пяти произведений

$$\frac{(y_1+y_2)(x_1-x_2)}{2},\quad \frac{(y_2+y_3)(x_2-x_3)}{2},$$

$$\frac{(y_3+y_4)(x_3-x_4)}{2},\quad \frac{(y_4+y_5)(x_4-x_5)}{2},$$

$$\frac{(y_5+y_1)(x_5-x_1)}{2}$$

три, соответствующие верхним сторонам (синие), положительны, а два, соответствующие нижним сторонам (красные), отрицательны; вычитая из суммы площадей синих трапеций сумму площадей красных, находим площадь пятиугольника.

Полученную сумму можно несколько упростить, сократив произведения x_1y_1, x_2y_2, ...:

$$S=\frac{(y_1+y_2)(x_1-x_2)}{2}+\frac{(y_2+y_3)(x_2-x_3)}{2}+$$
$$+\frac{(y_3-y_4)(x_3-x_4)}{2}+\frac{(y_4+y_5)(x_4-x_5)}{2}+$$
$$+\frac{(y_5+y_1)(x_5-x_1)}{2}=$$
$$=\frac{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\ldots+(x_5y_1-x_1y_5)}{2}.$$

1. Выведите формулу площади выпуклого n-угольника при любом n.

Основная формула

Итак, площадь S выпуклого n-угольника с вершинами $A_k(x_k;\ y_k)$, $k=1, 2, ..., n$, равна

$$\frac{1}{2}\left[(x_1y_2-x_2y_1)+\right.$$
$$\left.+(x_2y_3-x_3y_2)+\ldots+(x_ny_1-x_1y_n)\right].\quad (1)$$

Выражение $ad-bc$ так часто встречается в математике, что для него принято специальное обозначение $\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ и название «определитель

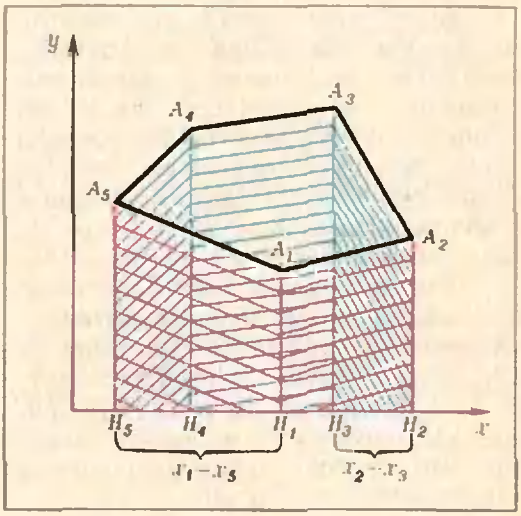


Рис. 1.

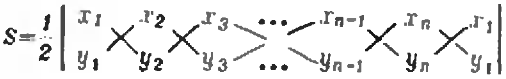


Рис. 2. **Произведения чисел, соединенных синим отрезком, берутся со знаком +, а красным — со знаком —.**

второго порядка»; с помощью таких определителей формулу площади можно записать компактнее:

$$S=\frac{\begin{vmatrix}x_1 x_2\\ y_1 y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2 x_3\\ y_2 y_3\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix}x_n x_1\\ y_n y_1\end{vmatrix}}{2}.$$

(Для запоминания формулы (1) удобен рисунок 2. Заметим, что формула (1) предполагает, что вершины занумерованы против часовой стрелки.)

2. Проверьте, что если занумеровать вершины в обратном порядке — по часовой стрелке, то каждая круглая скобка, соответствующая определенной стороне многоугольника: A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1, изменит знак. Тот же эффект будет, если поменять местами привычные обозначения осей — изменить *ориентацию* плоскости.

Чтобы не заботиться о том или ином направлении нумерации вершин, вместо квадратных скобок в формуле (1) можно поставить знак модуля. Полученная формула

$$S=\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}(x_k y_{k+1}-x_{k+1}y_k)\right| \qquad (2)$$

годится для любого случая. (Напомним еще раз, что y_{n+1} и x_{n+1} следует заменить на y_1 и x_1.)

Заметим, что пока мы считали все координаты вершин многоугольника положительными, а сам многоугольник — выпуклым. Было бы очень обидно и удивительно, если бы наша формула оказалась верной лишь при таком дополнительном предположении. К счастью, это не так: *формула справедлива для любого многоугольника на плоскости.* Как доказать ее для невыпуклого многоугольника, мы обсудим ниже — в упражнении 13 (см. также заметку С. Сефибекова на с. 20). А сейчас мы избавимся от предположения, что многоугольник расположен внутри угла $x>0$, $y>0$.

3. Проверьте, что правая часть формулы (2) не изменится, если:

а) каждое x_k заменить на x_k+a;
б) каждое y_k заменить на y_k+b.

Любой многоугольник $A_1A_2...A_n$ мы можем параллельно перенести на некоторый вектор $(a;\ b)$ в угол $x>0$, $y>0$. При этом координаты его вершин изменяются, но не меняются ни его площадь — левая часть формулы (2), ни правая часть этой формулы. Поскольку для полученного многоугольника с положительными координатами вершин равенство (2) верно, оно будет верным и для исходного многоугольника $A_1A_2...A_n$.

4. Найдите по формуле (2) площади четырехугольников с вершинами:

а) (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1);
б) (0; 0), (—1; 1), (2; 3), (1; 2);
в) (0; 5), (3; 0), (0; —4), (2; 0).

Проверьте ответ, найдя эту площадь другим способом.

5. а) Запишите формулу для площади треугольника с вершинами (0; 0), $(a;\ b)$, $(c;\ d)$.

б) При каком условии три точки $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$ и $(x_3;\ y_3)$ лежат на одной прямой?

Комбинации треугольников

Основную формулу (2) можно вывести иначе — так, что будет ясен геометрический смысл каждого слагаемого $(x_k y_{k+1}-x_{k+1}y_k)/2$ (заметим, что в него входят координаты только двух соседних точек A_k и A_{k+1}). Мы по-прежнему можем считать, что $x_k>0$, $y_k>0$.

Оказывается, выражение $(x_k y_{k+1}-x_{k+1}y_k)/2$ равно по модулю площади треугольника OA_kA_{k+1}, причем положительно, если отрезок OA_{k+1} составляет больший угол с осью x, чем OA_k, и отрицательно, если меньший.

6. Пусть $B(x_1;\ y_1)$ и $C(x_2;\ y_2)$ — две точки с положительными координатами, причем $y_1/x_1<y_2/x_2$. Тогда площадь параллелограмма $OBDC$ (рис. 3) равна $x_1y_2-x_2y_1$.

Теперь ясно, что сумма n членов $(x_k y_{k+1}-x_{k+1}y_k)/2$ даст нужную площадь n-угольника (см. рисунок 4: из суммы площадей синих треугольников мы вычтем сумму площадей красных — это удачное совпадение знаков уже встречалось нам в рассуждениях с трапециями).

7. Проверьте, что геометрический смысл выражения $x_1y_2-x_2y_1$ для точек $B(x_1;\ y_1)$, $C(x_2;\ y_2)$ с координатами любого знака — это

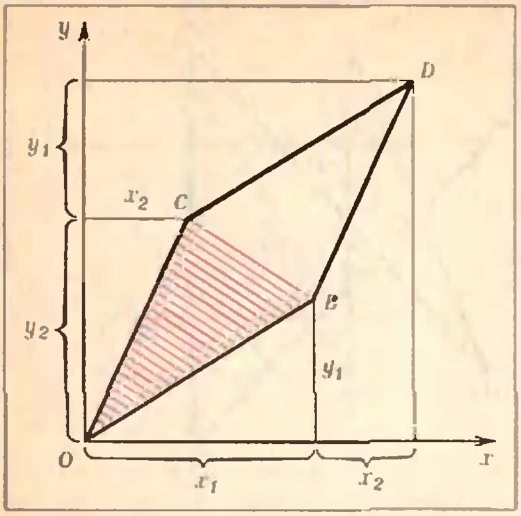


Рис. 3.

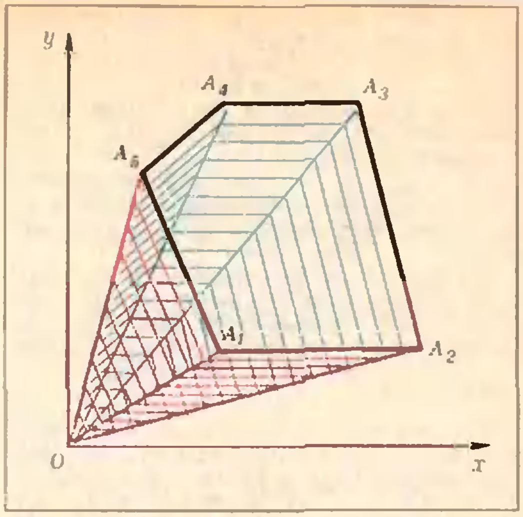


Рис. 4. .

ориентированная площадь параллелограмма $OBDC$, построенного на векторах $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ *): площадь $OBDC$ берется со знаком «плюс», если направление $\vec{OC}$ получается из направления $\vec{OB}$ вращением против часовой стрелки (на угол не больше 180°) и «минус», если по часовой стрелке.

Дополнительные задачи и комментарии

В заключение предлагаем доказать еще несколько утверждений, связанных с формулой площади многоугольника, ее доказательствами и обобщениями.

8. Для двух векторов $\vec{b}=\vec{OB}$, $\vec{c}=\vec{OC}$ на плоскости будем обозначать ориентированную площадь параллелограмма $OBDC$ (упражнение **7**) через $\vec{b} \wedge \vec{c}$.

Тогда для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа λ выполнены равенства:

1°. $\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$.

2°. $\lambda\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})$.

3°. $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

4°. $\vec{a} \wedge (\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$.

Величину $\vec{a} \wedge \vec{b}$ называют иногда *псевдоскалярным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

9. Найдя координаты точек A, B пересечения прямой $ax+by+c=0$ с осями координат ($a\neq 0$, $b\neq 0$) и площадь треугольника ABM_0, где $M_0(x_0;\ y_0)$, выведите формулу для расстояния от точки M_0 до данной прямой:

$$|ax_0+by_0+c|/\sqrt{a^2+b^2}.$$

10. а) Пусть вершины A_1, A_2, …, A_n многоугольника двигаются по плоскости прямолинейно и равномерно (каждая — со своей постоянной скоростью). Докажите, что площадь многоугольника $A_1A_2...A_n$ меняется со временем t как модуль квадратного трехчлена от t *).

б) Рассмотрим произвольный *призмоид* высоты h — наименьший выпуклый многогранник, содержащий два *основания* — выпуклые многоугольники M_0 и M_1, лежащие в параллельных плоскостях π_0 и π_1, отстоящих на расстоянии h друг от друга. Пусть S_t — площадь сечения этого призмоида плоскостью, параллельной π_0 и отстоящей от нее на $th\,(0<t<1)$. Докажите, что S_t — квадратный трехчлен от t.

в) Докажите *формулу Симпсона:* объем призмоида равен

$$V=(S_0+4S_{1/2}+S_1)h/6,$$

где S_0 и S_1 — площади его оснований, а $S_{1/2}$ — площадь среднего сечения.

11*. Пусть все грани выпуклого многогранника — треугольники. Докажите, что его объем можно найти как сумму

$$\frac{1}{6}\sum\begin{vmatrix} x_i x_j x_k \\ y_i y_j y_k \\ z_i z_j z_k \end{vmatrix}$$

по всем его граням $\triangle A_iA_jA_k$, где $A_i(x_i;\ y_i;\ z_i)$ — вершина многогранника, а «определитель третьего порядка» вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ y_1 y_2 y_3 \\ z_1 z_2 z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 + x_2y_3z_1 -$$

$-x_2y_1z_3+x_3y_1z_2-x_3y_2z_1$, причем выписывать каждый определитель надо, глядя на грань $A_iA_jA_k$ из точки (0; 0; 0): координаты вершин видимых граней — по часовой стрелке, невидимых — против нее.

12. а) Проверьте с помощью формулы (2), что при гомотетии с коэффициентом k площадь увеличивается в k^2 раз, а при симметриях $(x;\ y)\rightarrow(-x;\ y)$, $(x;\ y)\rightarrow(x;\ -y)$, $(x;\ y)\rightarrow(-x;\ -y)$ она не меняется.

---

*) См. также статью А. Лопшица «Площади ориентированных фигур» («Квант», 1978, № 3).

*) Этот факт неоднократно использовался в «Кванте» (см., например, статью Н. Васильева «Семейство параллельных n-угольников» — «Квант», 1974, № 11).

б)* Проверьте, что при преобразованиях плоскости $(x;\ y) \to (x';\ y')$, где

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$

площадь многоугольника не меняется. (Это преобразование — поворот на угол φ вокруг начала координат.)

в) То же — для преобразования $x' = kx$, $y' = y/k$ (k — фиксированное число); это — так называемый *гиперболический поворот.*

г) Во сколько раз изменяется площадь при преобразовании $x' = ax+by$, $y' = cx+dy$? (Ответ. Этот коэффициент один и тот же для всех многоугольников; он равен модулю определителя $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.)

13. Формула (2) верна и для невыпуклого многоугольника. Чтобы доказать ее, удобно использовать такую лемму: *Пусть MP — луч, выходящий из некоторой точки M. Если M лежит вне многоугольника, то, обходя многоугольник против часовой стрелки, мы пересечем луч MP четное число раз (поровну — справа налево и слева направо); если же точка M лежит внутри многоугольника, то — нечетное число раз (справа налево — на один раз больше).*

14. Пусть многоугольник разрезан ломаной линией на две части. Проверьте, что площади, определенные по формуле (2) для каждой из частей, в сумме дают выражение (2) для всего многоугольника.

Этот факт (аддитивность) вместе с результатами упражнений 3 и 12 а), б) (инвариантность относительно переносов, симметрий и поворотов) дает возможность принять число (2) за определение площади многоугольника.

15. Пусть все стороны многоугольника $A_1B_1A_2B_2...A_mB_m$: $A_k(a_k;\ b_k)$, $B_k(a_{k+1};\ b_k)$, $k=1, ..., m$, причем $B_m(a_1;\ b_m)$. Запишите формулу площади для такого многоугольника. Проверьте ее для шестиугольника с вершинами (—1; 0), (2; 0), (2; 5), (3; 5), (3; 7), (—1; 7). (Эта формула пригодилась нам в решении задачи **М608** — см. «Квант», 1980, № 11.)

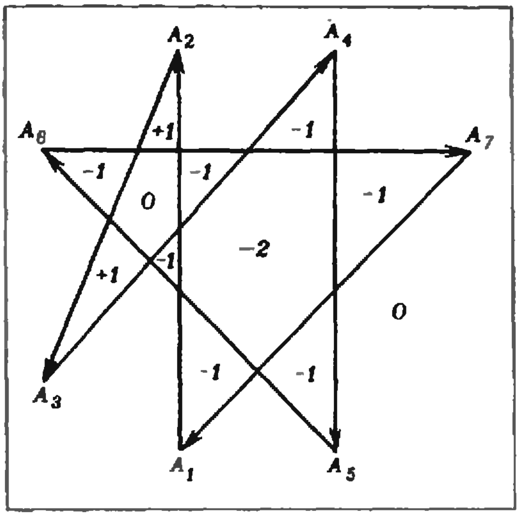


Рис. 5. Числа указывают, сколько раз (с учетом направления) ломаная обходит вокруг каждого куска.

16. Выясните, что дает формула (2) для любых n точек $A_1, A_2, ..., A_n$ плоскости.

Ответ состоит в следующем: пусть замкнутая ломаная $A_1A_2...A_n$ делит плоскость на r кусков площади $S_1, ..., S_r$; тогда правая часть формулы (2) равна сумме $k_1S_1 + ... + k_rS_r$, где целое число k_j показывает, сколько оборотов делает ломаная $A_1A_2...A_n$ вокруг j-го куска (причем обороты против часовой стрелки считаются положительными, по часовой стрелке — отрицательными, см. рис. 5).

С. Сефибеков

О площади многоугольника

В статье Н. Вагутена обсуждается формула площади многоугольника и ее приложения. Еще одно доказательство этой формулы приводится в публикуемой ниже заметке.

Для площади S_n n-угольника $A_1A_2...A_n$ справедлива формула

$$S_n = \frac{1}{2}\,|\,(x_1y_2+x_2y_3+...+x_ny_1) - (y_1x_2+y_2x_3+...+y_nx_1)\,|, \qquad (1)$$

в которой $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, ..., $(x_n;y_n)$ — координаты вершин A_1, A_2, ..., A_n.

Доказательство формулы (1) мы разобьем на несколько задач.

Задача 1. *Докажите формулу (1) для треугольника:*

$$S_3 = \frac{1}{2}\,|\,(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1) - (y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1)\,|. \qquad (2)$$

Указание. Докажите формулу (2) сначала для прямоугольного треугольника с катетами, параллельными осям координат (рис. 1), затем для треугольника, одна из сторон которого параллельна одной из осей координат (рис. 2), а затем для общего случая (рис. 3).

Если вы решили до конца эту задачу, вам будет несложно решить и следующую.

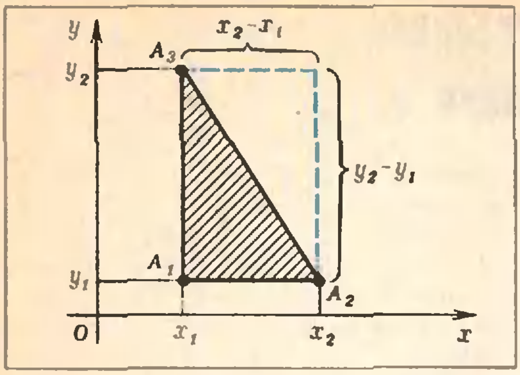


Рис. 1.

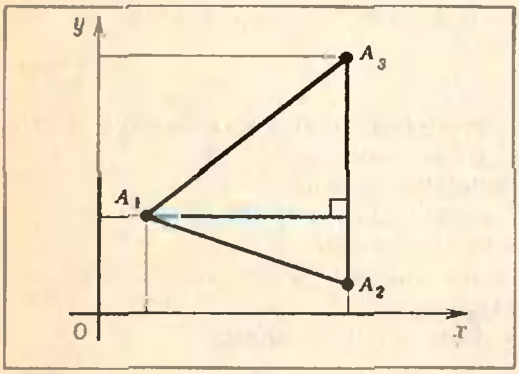


Рис. 2.

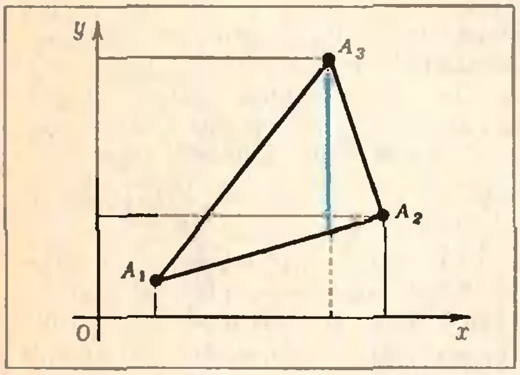


Рис. 3.

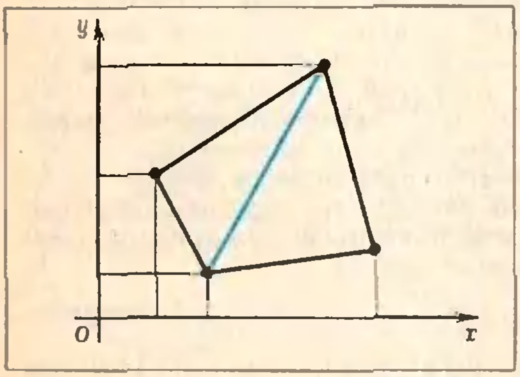


Рис. 4.

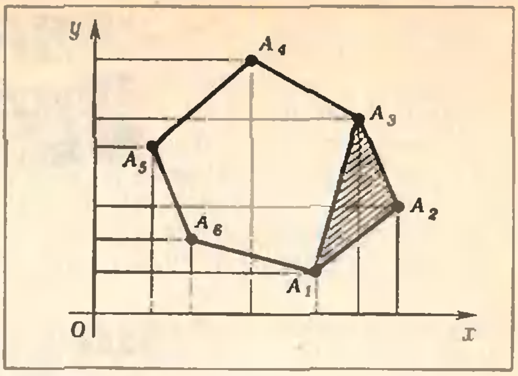


Рис. 5.

Задача 2. *Докажите формулу (1) для выпуклого четырехугольника.*

Указание. Разбейте четырехугольник на два треугольника (с помощью диагонали — см. рис. 4) и примените задачу 1.

Задача 3. *Докажите формулу (1) для выпуклого n-угольника.*

Указание. Воспользуйтесь методом математической индукции, представив данный выпуклый n-угольник $A_1A_2A_3...A_n$ в виде объединения $(n-1)$-угольника $A_2A_3...A_n$ и треугольника $A_1A_2A_3$ (рис. 5). Читателям, не знакомым с методом математической индукции, мы предлагаем решить задачу 3 для $n=5$.

Перейдем теперь к случаю произвольного (не обязательно выпуклого) многоугольника.

Задача 4. *Докажите формулу (1) для произвольного четырехугольника.*

Задача 5*. *Докажите формулу (1) для произвольного n-угольника.*

Указание. Докажите, что в любом n-угольнике можно провести диагональ, целиком лежащую внутри него и примените метод математической индукции.

задачник кванта

Задачи

М676 — М680; Ф688 — Ф692

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 июня 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 26/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4 — 81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М676, М677» или «Ф688». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М676. Докажите, что для любого натурального m сумма цифр числа 1981^m не меньше 19.

А. Савкин

М677. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка M, являющаяся

а) точкой пересечения медиан;

б) точкой пересечения биссектрис;

в) точкой пересечения высот.

Докажите, что если радиусы окружностей, вписанных в треугольники AMB, BMC, AMC, равны, то треугольник ABC — правильный.

Э. Туркевич

М678. $2m$-значное число называется *справедливым*, если его четные разряды содержат столько же четных цифр, сколько и нечетные. Докажите, что в любом $(2m+1)$-значном числе можно вычеркнуть одну из цифр так, чтобы полученное $2m$-значное число было справедливым (рис. 1).

А. Сидоренко

М679. а) На плоскости расположены четыре круга так, что первый касается второго в точке A, второй — третьего в точке B, третий — четвертого в точке C и четвертый — первого в точке D (рис. 2). Докажите, что через четыре названные точки можно провести окружность или прямую.

б) *В пространстве расположены четыре шара так, что первый касается второго в точке A, второй — третьего в точке B, третий — четвертого в точке C и четвертый — первого в точке D. Докажите, что через четыре названные точки можно провести окружность или прямую.

в) *В пространстве расположены четыре шара так, что каждый касается трех других. Докажите, что шесть точек касания принадлежат одной сфере или одной плоскости.

В. Произволов

М680. Два связиста играют в такую игру. Имеются n телефонных узлов, и связисты по очереди соеди-

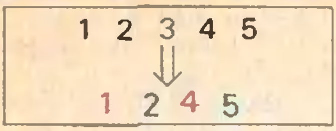


Рис. 1.

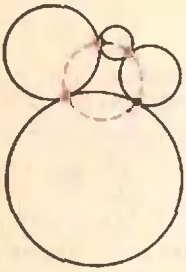


Рис. 2.

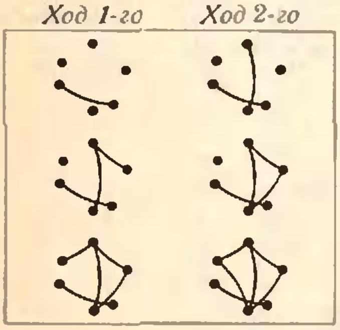


Рис. 3.

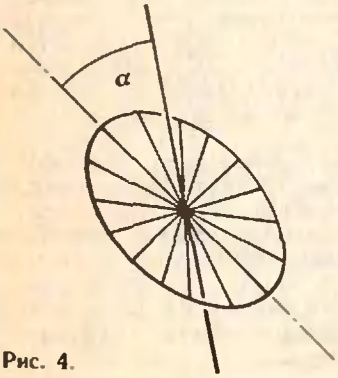


Рис. 4.

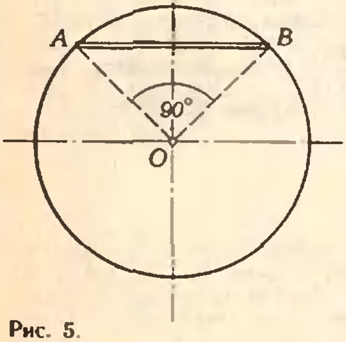


Рис. 5.

няют кабелем два из них по своему выбору. Выигрывает тот, после хода которого с любого узла можно будет дозвониться до любого другого (быть может, через несколько промежуточных; начало игры изображено на рисунке 3).

а) Выясните, кто выигрывает при $n=4, 5, 6, 7, 8$ — начинающий или его партнер?

б) Каков ответ при произвольном n?

Рассмотрите также два видоизмененных варианта игры:

в) Пусть игрок, связавший все узлы, проигрывает. Ответьте на вопросы пунктов а) и б) для этой новой игры;

г) Пусть вначале все узлы попарно связаны кабелем, а связисты убирают по очереди по одному соединению. Игрок, нарушивший связь в схеме, проигрывает. Вопрос тот же: кто выигрывает при правильной стратегии для $n=4, 5, 6, 7, 8$? для произвольного n?

Замечание. Можно было бы рассмотреть четвертый вариант: считать, что в пункте г) игрок, нарушивший связь, выигрывает. Полное исследование этого варианта игры автору неизвестно.

А. Разборов

Ф688. Тонкий обруч массы M и радиуса R жестко закреплен при помощи легких спиц на легкой тонкой оси, проходящей через центр обруча, так, что плоскость обруча составляет с осью угол α (рис. 4). Определить, какую работу необходимо совершить, чтобы раскрутить ось до угловой скорости ω.

С. Кротов

Ф689. На гладком горизонтальном столе лежит пачка бумаги, в которой 500 листов. Сотый лист (считая снизу) больше других. Этот лист осторожно тянут в горизонтальном направлении. Какое максимальное ускорение можно сообщить пачке, чтобы она при этом двигалась, не распадаясь? Каково максимальное ускорение, с которым может двигаться центр масс пачки? С каким ускорением должен двигаться при этом сотый лист? Коэффициент трения бумаги о бумагу $\mu=0{,}2$.

З. Рафаилов

Ф690. Между точками A и B на поверхности Луны, расположенными на угловом расстоянии 90°, прорыт прямолинейный канал (рис. 5), заполненный воздухом при нормальной температуре. Давление воздуха в середине канала $p=10^5$ Па. Найти давление воздуха в канале у поверхности Луны. Луну считать однородным шаром с диаметром $D=3480$ км. Ускорение $g_л$ свободного падения на поверхности Луны в шесть раз меньше земного.

А. Стасенко

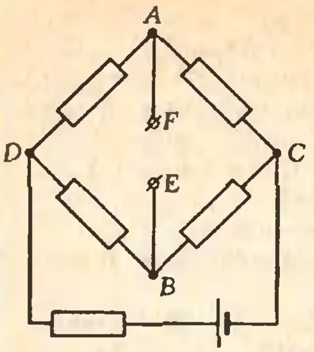


Рис. 6.

Ф691. Между точками E и F схемы, изображенной на рисунке 6, включают сначала идеальный вольтметр, а затем амперметр. Их показания равны соответственно U_0 и I_0. Какой ток будет течь через резистор с сопротивлением R, включенный между точками E и F?

В. Петерсон

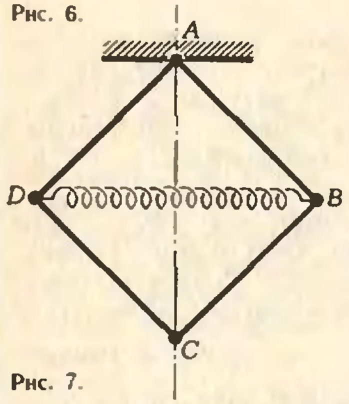


Рис. 7.

Ф692. Конструкция, изображенная на рисунке 7, состоит из четырех легких жестких стержней длины a каждый и легкой пружины длины $2a$. Стержни скреплены небольшими одинаковыми массивными шариками. В точке A система закреплена. В состоянии равновесия системы стержни образуют квадрат. Определить период малых колебаний системы, при которых точка C движется вдоль вертикали.

К. Сергеев

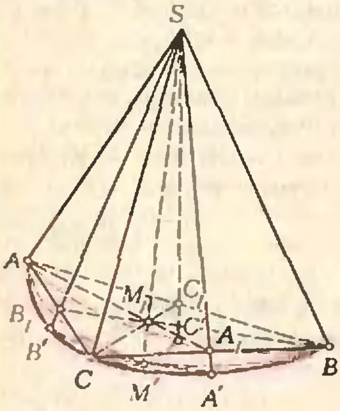
Решения задач

М628, М630 — М635; Ф638 — Ф646

М628. *На сфере построен треугольник, одна «сторона» которого имеет величину 120°. Докажите, что «медиана», опущенная на эту сторону, делится каждой из двух других «медиан» на две равные части. («Медианы» и «стороны» — дуги больших окружностей.)*

Соединим вершины сферического треугольника ABC с центром сферы S (см. рисунок). В образовавшемся трехгранном угле с вершиной S плоские углы ASC, BSA и CSB служат мерой «сторон», а двугранные углы SA, SB и SC — мерой углов сферического треугольника ABC. Таким образом, все свойства сферического треугольника ABC и трехгранного угла S эквивалентны.

Проведем через каждое ребро трехгранного угла плоскость, проходящую через биссектрису противоположного этому ребру плоского угла. Линии пересечения этих трех плоскостей со сферой будут содержать «медианы» AA_1, BB_1, CC_1 сферического треугольника ABC. Остальные обозначения ясны из рисунка.



Предположим, что величина «стороны» AB равна 120°, или, что то же самое, $\widehat{ASB}=120°$. Тогда $\widehat{C_1SB}=60°$. Из прямоугольного треугольника C_1SB

$$|SC_1|=\frac{1}{2}|SB|=\frac{1}{2}|SC|,$$

откуда $\frac{|SC|}{|SC_1|}=2.$

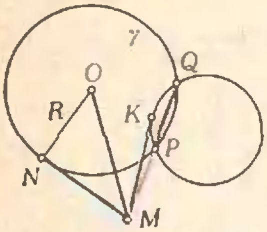
С другой стороны, $|CM_1|=2|M_1C_1|$ (отрезки CC_1, BB_1 и AA_1 — медианы плоского треугольника ABC); следовательно, $\frac{|CM_1|}{|M_1C_1|}=2$, откуда $\frac{|SC|}{|SC_1|}=\frac{|CM_1|}{|M_1C_1|}$. Таким образом, отрезок SM_1 — биссектриса угла CSC_1, откуда $\breve{CM'}\cong\breve{M'C'}$.

А. Ягубьянц

◆

М630. *На плоскости даны окружность γ и точка K. Проведем через произвольные точки P, Q окружности γ*

Обозначим центр окружности γ через O; пусть R — радиус этой окружности (см. рисунок). Проведем из точки M касательную к окружности γ. Поскольку квадрат длины касательной равен произведению длины секущей на длину *и точку K окружность. Пусть M — точка пересечения касательной к этой окружности в точке K с прямой PQ. Какое множество заполняют точки M?*



ее внешней части (докажите!),

$$|MK|^2=|MQ|\cdot|MP|=|MN|^2,$$

так что

$$|OM|^2-|MK|^2=|OM|^2-|MN|^2=R^2.$$

Легко доказать (например, с помощью теоремы Пифагора), что точка M лежит на некоторой прямой l, перпендикулярной OK, для всех точек которой разность квадратов расстояний до точек O и K равна R^2*). Можно показать также, что и наоборот — все точки этого перпендикуляра l принадлежат нашему множеству: если для точки $M\in l$ построить произвольную окружность, касающуюся MK в точке K и пересекающую γ в некоторых точках P, Q, то прямая PQ пересечет l в точке M.

И. Шарыгин

◆

M631. *Двузначные числа от 19 до 80 выписаны подряд. Делится ли получающееся число 192021...7980 на 1980?*

Так как $1980=99\cdot20$, причем 99 и 20 не имеют общих делителей, достаточно выяснить, делится ли число $A=192021...7980$ на 20 и 99. Делимость A на 20 очевидна. Далее заметим, что 100 в любой степени при делении на 99 дает остаток 1, поэтому число

$$A=19\cdot100^{61}+20\cdot100^{60}+...+79\cdot100+80$$

при делении на 99 дает такой же остаток, как и число

$$B=19+20+...+79+80=\frac{19+80}{2}\cdot62=99\cdot31.$$

Итак, получилось, что число B делится на 99; следовательно, и число A делится на 99, а вместе с тем и на 1980.

В. Федотов

◆

M632. *Груз, упакованный в контейнеры, нужно доставить на орбитальную космическую станцию «Салют». Число контейнеров не меньше 35, общая масса груза 18 тонн. Имеется семь транспортных кораблей «Прогресс», каждый из которых может доставить на орбиту 3 тонны груза. Известно, что эти корабли могут одновременно доставить любые 35 из имеющихся контейнеров. Докажите, что они смогут доставить на орбиту сразу весь имеющийся груз.*

Назовем контейнер массы более 0,5 т *тяжелым*, а контейнер, масса которого не превосходит 0,5 т, — *легким*. Поскольку общая масса груза равна 18 т, число тяжелых контейнеров меньше чем $18:0,5=36$, то есть не превосходит 35. Поэтому по условию задачи все тяжелые контейнеры можно погрузить на имеющиеся корабли (добавив, при необходимости, легкие контейнеры до общего числа 35).

После погрузки тяжелых контейнеров могут остаться только легкие контейнеры. Покажем, что все эти контейнеры можно по очереди догрузить в корабли. В самом деле, если на каком-то шаге погрузки контейнер массы $x\leqslant0,5$ т не удается погрузить ни на один из семи кораблей, то на каждый корабль погружено уже больше $(3-x)$ тонн груза, всего погружено больше $7(3-x)$ тонн, а осталось меньше $18-7(3-x)=7x-3$ тонн груза. Но тогда $x<7x-3$, откуда $x>0,5$, в противоречие с предположением. Требуемое доказано.

А. Колотов

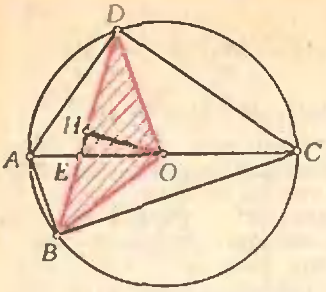
◆

M633. *На диаметре AC некоторой окружности дана точка E. Проведите через нее хорду BD так, чтобы площадь четырехугольника ABCD была наибольшей.*

Пусть O — центр, R — радиус окружности, $|OE|=a$. Легко видеть (см. рисунок), что $S_{ABCD}=\frac{2R}{a}S_{\triangle OBD}$. Следовательно, площадь четырехугольника наибольшая, когда наибольшей является площадь треугольника OBD. Треугольник OBD равнобедренный, $|OB|=|OD|=R$, $S_{\triangle OBD}=\frac{1}{2}R^2\sin\varphi$, где $\varphi=BOD$. Угол φ тем меньше, чем меньше длина хорды BD или, соответственно, чем длиннее проведенный к этой хорде перпендикуляр OH. Поскольку $|OH|\leqslant|OE|=a$, наименьшее

---

*) См., например, книгу И. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые», §2 (Азбука), утверждение E, с. 32 (М., «Наука», 1978).



значение $\varphi=\varphi_0$ характеризуется тем, что отрезки OH и OE совпадают, что соответствует хорде BD, перпендикулярной AC; для этого значения

$$\cos\frac{\varphi_0}{2}=\frac{a}{R}.$$

Итак, остается найти наибольшее значение площади треугольника OBD при $\varphi_0<\varphi<\pi$. Возможны два случая:

1) Если $\varphi_0<\frac{\pi}{2}$, то максимум достигается при $\varphi=\frac{\pi}{2}$. В этом случае

$$\frac{a}{R}=\cos\frac{\varphi_0}{2}>\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$a>\frac{R}{\sqrt{2}},$$

а искомая хорда BD, стягивающая дугу в 90°, должна отстоять от центра на расстояние $R/\sqrt{2}$, то есть должна касаться окружности с центром O радиуса $R/\sqrt{2}$.

2) Если же $\varphi_0>\frac{\pi}{2}$, что будет при $a<\frac{R}{\sqrt{2}}$, то максимум площади достигается при $\varphi=\varphi_0$ — искомая хорда BD должна быть перпендикулярна диаметру AC.

И. Шарыгин

◆

М634. *Обозначим через $S(n)$ сумму всех цифр натурального числа n.*

а) Существует ли натуральное n такое, что $n+S(n)=1980$?

б) Докажите, что хотя бы одно из любых двух последовательных натуральных чисел представимо в виде $n+S(n)$ для некоторого третьего натурального числа n.

а) Ответ. Существует: $n=1962$. Как до этого догадаться, видно из решения пункта б) этой задачи.

б) Обозначим $n+S(n)$ через $S(n)$. Легко видеть, что если n оканчивается на цифру 9, то $S_{n+1}<S_n$; в противном случае $S_{n+1}=S_n+2$.

Докажем, что для любого $m\in\mathbf{N}$ хотя бы одно из чисел m, $m+1$ равно S_n для некоторого n. Так как $S_1=2$, для $m=1$ и $m=2$ утверждение задачи верно. Если $m>2$, то существуют S_n, меньшие m (например, S_1), и в то же время при $n>m$ $S_n>n>m$. Следовательно, среди n таких, что $S_n<m$, найдется наибольшее — обозначим его через N. Тогда $S_{N+1}>m>S_N$, поэтому N не может оканчиваться на цифру 9 и, значит, $S_{N+1}=S_N+2$. Следовательно, $m<S_{N+1}<m+2$, поэтому число S_{N+1} равно либо m, либо $m+1$ — требуемое доказано.

С. Конягин

◆

М635. *Коротышки, проживающие в Цветочном городе, вдруг стали болеть гриппом. В один день несколько коротышек простудились и заболели, и хотя потом уже никто не простужался, здоровые коротышки заболевали, навещая своих больных друзей. Известно, что каждый коротышка болеет гриппом ровно день, причем после этого у него по крайней мере еще один день есть иммунитет, то есть он здоров и заболеть опять в этот день не может. Несмотря на эпидемию, каждый здоровый коротышка ежедневно навещает всех своих больных друзей. Когда началась эпидемия, коротышки забыли о прививках и не делают их.*

Докажите, что:

а) если до первого дня эпидемии какие-нибудь коротышки

а) Пусть A, B, C — три друга, причем A в начале эпидемии имел иммунитет, B заболел в первый день, а C был здоров, но иммунитета не имел.

Если предположить, что иммунитет у каждого из этих коротышек длится один день, то, учитывая правила поведения коротышек, получаем «график заболеваемости», изображенный на рисунке («И» — имеет иммунитет; «З» — здоров, но не имеет иммунитета; «Б» — болен). Очевидно, в такой ситуации эпидемия никогда не закончится.

б) Приведем два решения этой задачи.

Первое решение наиболее ясно показывает, как идет распространение эпидемии. Изобразим всех коротышек точками и соединим линиями тех из них, которые знакомы между собой. Будем говорить, что коротышка B удален от коротышки A на расстояние k, если от коротышки A можно перейти к коротышке B, пройдя по k линиям, и нельзя перейти по меньшему числу линий. Разобьем множество всех коротышек на подмножества M_0, M_1, M_2, ... по следующим правилам: в множество M_0 входят все коротышки, заболевшие в первый день эпидемии; в множество M_1 — все коротышки, удаленные от коротышек из M_0 на расстояние 1; в множество M_2 — все коротышки, удаленные от коротышек из M_0 на расстояние 2, и так далее. Коротышек, которые вообще не связаны *сделали прививку и имели в первый день иммунитет, то эпидемия может продолжаться сколь угодно долго;*

б) если же в первый день иммунитета ни у кого не было, то эпидемия рано или поздно кончится.

«График заболеваемости»

День	*A*	*B*	*C*
1	И	Б	З
2	З	И	Б
3	Б	З	И
4	И	Б	З
5	З	И	Б
⋮	⋮	⋮	⋮

с коротышками из M_0 никакой цепочкой знакомств, включим в отдельное множество M' — эти коротышки никогда не заболеют. Поскольку общее число коротышек конечно, число множеств M_k тоже конечно. С другой стороны, из определения расстояния между коротышками следует что коротышка из множества M_k заболеет ровно на $(k+1)$-й день эпидемии, причем может передать болезнь только коротышкам из множества M_{k+1} (остальные его знакомые принадлежат множеству M_{k-1} и на $(k+1)$-й день имеют иммунитет). Следовательно, в первый день болеют только коротышки из множества M_0, во 2-й — только коротышки из M_1, в 3-й — только коротышки из M_2, и так далее. Так как число множеств M_k конечно, эпидемия рано или поздно закончится.

Второе решение — от противного.

Если каждый коротышка будет болеть ровно один раз, то эпидемия кончится. Если же она не кончится, то должен быть коротышка, заболевший второй раз. Пусть в k-й день коротышка A заболел во второй раз первым (или одним из первых, если в этот же день повторно заболело несколько человек). Он заразился накануне от своего друга B, а B болел при этом в первый раз, заразившись в $(k-2)$-й день. Так как A и B — друзья, B должен был заразиться от A, когда A болел в первый раз. Следовательно A болел впервые в $(k-2)$-й день, а на следующий день имел иммунитет и поэтому не мог заразиться. Мы пришли к противоречию, показывающему, что никакой коротышка не мог болеть дважды.

А. Земляков, Ю. Лысов

◆

Ф638. *Читая в 1908 году лекции в Страсбурге, академик Л. И. Мандельштам поражал слушателей следующим красивым опытом. Два камертона на резонаторных ящиках, имеющих резонансные частоты 500 Гц и 505 гц, ставили рядом и один из камертонов возбуждали. Второй камертон при этом практически не откликался на колебания первого. Но стоило экспериментатору начать периодически закрывать и открывать рукой ящик звучащего камертона, как тут же начинал звучать второй камертон. Объясните результат этого опыта.*

Из ящика звучащего камертона исходят волны частоты $f=500$ Гц. Периодически закрывая ящик, Л. И. Мандельштам изменял амплитуду колебаний, приходящих ко второму камертону. Что же представляют собой колебания с меняющейся амплитудой — модулированные по амплитуде колебания?

Рассмотрим простейший случай, когда модуляция синусоидальная, то есть амплитуда A меняется по закону синуса (косинуса) с частотой F:

$$A = A_0 \cos 2\pi F t.$$

В этом случае изменение давления (или плотности) воздуха, которое и является звуковой волной, происходит по закону

$$\Delta p = (A_0 \cos 2\pi F t) \cos 2\pi f t. \qquad (*)$$

Преобразуем правую часть равенства (*), воспользовавшись известными формулами тригонометрии:

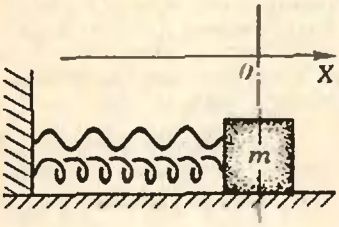
$$\Delta p = \frac{A_0}{2}\,[\cos 2\pi (f-F) t + \cos 2\pi (f+F) t].$$

Таким образом, колебания частоты f, амплитуда которых меняется с частотой F, можно представить в виде суммы (суперпозиции) гармонических колебаний (то есть колебаний синусоидальной формы с постоянной амплитудой) двух частот: $f_1=f-F$ и $f_2=f+F$. Если $F=5$ Гц, то частота f_2 совпадает с резонансной частотой камертона-приемника, соответствующая составляющая колебаний раскачивает этот камертон, и он начинает звучать.

При произвольном, несинусоидальном, но периодическом характере модуляции колебаний их представление в виде суммы гармонических составляющих (их спектр) будет содержать больше двух членов (гармоник) — говорят, что спектр колебаний будет богаче. Но если период модуляции равен $1/F$, то в спектре обязательно будет составляющая с частотой $f+F$ (как и с частотой $f-F$). Мы рассматривали синусоидальный закон модуляции только потому, что в этом случае разложение на гармоники выглядит наиболее просто и может быть проведено элементарным образом.

В. Белонучкин

Ф639. *Две пружинки с жесткостями k_1 и k_2 присоединены каждая одним концом к вертикальной стене, другим — к грузу массы m, лежащему на горизонтальном столе. В начальный момент пружина с жесткостью k_1 растянута на величину l_1, а пружина с жесткостью k_2 сжата на величину l_2. Груз отпускают. Найти амплитуду и период колебаний груза. Трением пренебречь.*



Примем координату центра груза в начальный момент за нуль (см. рисунок). Тогда зависимость сил упругости, действующих на груз, от координаты x груза будет следующая:

$$F_1(x) = -(l_1 + x)k_1,$$
$$F_2(x) = (l_2 - x)k_2.$$

Здесь $(l_1 + x)$, $-(l_2 - x)$ — алгебраические значения удлинений первой и второй пружин соответственно. В момент прохождения грузом положения равновесия суммарная сила F, действующая на груз со стороны пружин, равна нулю. Обозначим x_0 координату груза в этот момент. Тогда

$$F(x_0) = F_1(x_0) + F_2(x_0) = -(l_1 + x_0)k_1 + (l_2 - x_0)k_2 = 0,$$

откуда

$$x_0 = \frac{l_2k_2 - l_1k_1}{k_1 + k_2}.$$

Амплитуда колебаний груза равна, очевидно,

$$A = |x_0| = \frac{|l_2k_2 - l_1k_1|}{k_1 + k_2}.$$

Чтобы найти период колебаний, запишем, как зависит возвращающая сила F от отклонения груза от положения равновесия:

$$F = F_1 + F_2 = -x(k_1 + k_2) + (l_2k_2 - l_1k_1) =$$
$$= -x(k_1 + k_2) + x_0(k_1 + k_2) = -(k_1 + k_2)(x - x_0)$$

($(x - x_0)$ — отклонение груза от положения равновесия). Видно, что искомая зависимость такая же, как если бы к грузу была присоединена одна пружина с жесткостью $k = k_1 + k_2$. Поэтому период колебаний груза равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

А. Бергман

◆

Ф640. *На рисунках 1 и 2 показаны границы областей волнений, возбуждаемых кораблем на двух участках пути. Красными стрелками указаны направления скорости корабля. На первом участке (рис. 1) течение отсутствует. Направление течения на втором участке (рис. 2) показано синей стрелкой. Определите скорость течения, если скорость корабля относительно берегов в обоих случаях одна и та же и равна 18 км/ч.*

Совместим рисунки 1 и 2 (рис. 3). Из произвольной точки A на курсе корабля опустим перпендикуляр на границу области волнения в отсутствие течения. Длина этого перпендикуляра ($|AB|$ или $|AB'|$) определяет расстояние, пройденное волной за то время, за которое корабль прошел расстояние AO. Расстояние BC (или $B'C'$) определяет снос границы области волнения течением за тот же промежуток времени. Следовательно, отношение $|BC|/|AO|$ (или $|B'C'|/|AO|$) определяет отношение скорости v течения к скорости корабля. Из чертежа находим

$$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{5} \Rightarrow v = 3{,}6 \text{ км/ч}.$$

В. Белонучкин

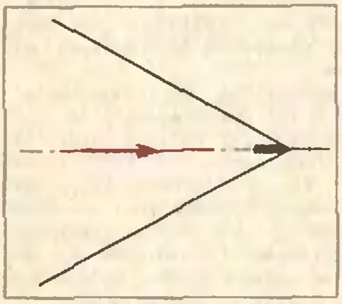


Рис. 1.

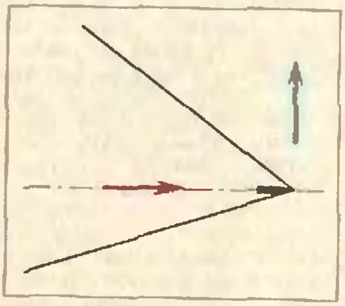


Рис. 2.

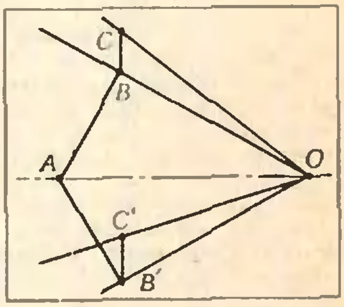


Рис. 3.

Ф641. *Настенные часы с маятником имеют массу $M=5$ кг. Масса груза на конце легкого маятника $m=150$ г. Какая ошибка в показаниях часов накопится за сутки, если часы подвесить к потолку на двух длинных параллельных шнурах? Считать, что часы, прикрепленные к стене, идут точно.*

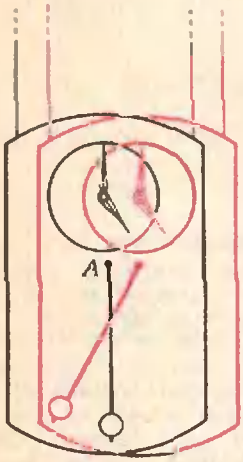


Рис. 1.

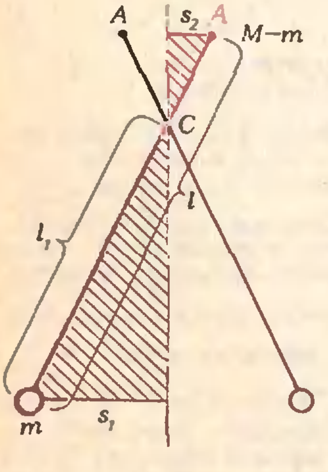


Рис. 2.

Подвешенные на шнурах часы, в отличие от часов, закрепленных на стене, могут раскачиваться. Если шнуры параллельны, то при раскачивании движение корпуса часов будет поступательным, то есть все точки часов (кроме маятника) будут двигаться одинаково. Это значит, что всю массу часов без маятника $(M-m)$ можно считать сосредоточенной в одной точке, например в точке A подвеса маятника (рис. 1).

Перемещения корпуса часов при их раскачивании будут невелики — много меньше амплитуды колебаний маятника часов (это будет показано ниже). Поэтому длинные шнуры все время будут оставаться почти вертикальными. Условие это будет выполняться тем лучше, чем длиннее шнуры.

Таким образом, действующие на часы силы натяжения шнуров можно считать направленными вертикально вверх. Силы тяжести, действующие на корпус и на маятник, направлены вертикально вниз. Других внешних сил нет. Следовательно, в горизонтальном направлении на рассматриваемую систему (корпус часов + маятник) никакие внешние силы не действуют, и центр масс этой системы по горизонтали перемещаться не будет.

Теперь ясно, что при колебаниях маятника корпус часов (точка A) будет совершать колебания в противофазе — так, чтобы центр масс (точка C на рисунке 2) все время оставался на одной вертикали. Смещения груза маятника s_1 и корпуса часов s_2 в любой момент будут относиться обратно пропорционально соответствующим массам:

$$\frac{s_1}{s_2}=\frac{M-m}{m}. \qquad (1)$$

Из формулы (1) видно, что при $m \ll M$ амплитуда S_2 раскачивания корпуса много меньше амплитуды S_1 колебаний маятника часов $(S_2 \ll S_1)$.

Остается выяснить, каким будет период T_1 колебаний маятника. Глядя на рисунок 2 и учитывая, что точка C по горизонтали не перемещается, нетрудно сообразить, что движение груза маятника m можно приближенно представить как свободные колебания математического маятника длиной l_1. (Строго говоря, точка C совершает перемещения по вертикали; однако при небольшой амплитуде колебаний маятника эти перемещения столь малы, что не влияют на период колебаний.)

Из подобия заштрихованных на рисунке 2 треугольников видно, что

$$\frac{l}{l_1}=1+\frac{s_2}{s_1}.$$

Подставляя сюда s_2/s_1 из соотношения (1), находим

$$\frac{l_1}{l}=1-\frac{m}{M}. \qquad (2)$$

Период колебаний математического маятника пропорционален квадратному корню из его длины: $T=2\pi\sqrt{l/g}$. Так как $l_1<l$, период T_1 колебаний маятника в подвешенных на длинных шнурах часах меньше периода T колебаний маятника в закрепленных на стене часах. Значит, подвешенные на шнурах часы будут спешить.

Учитывая соотношение (2), найдем отношение T_1/T:

$$\frac{T_1}{T}=\sqrt{\frac{l_1}{l}}=\sqrt{1-\frac{m}{M}}\approx 1-\frac{m}{2M}. \qquad (3)$$

(Здесь мы учли, что по условию задачи $m/M=0{,}03 \ll 1$, и воспользовались приближенной формулой $\sqrt{1+x}\approx 1+x/2$, справедливой при $|x| \ll 1$.)

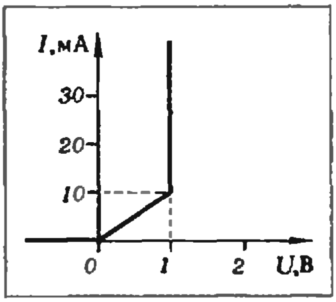
Теперь из (3) легко найти уменьшение периода $\Delta T=T-T_1$:

$$\Delta T=T\frac{m}{2M}.$$

Подставив численные значения m и M из условия, найдем: $\Delta T=0{,}015T$. За сутки подвешенные на шнурах часы уйдут вперед на 21 мин 36 с.

Е. Бутиков

Ф642. *На рисунке приведена идеализированная вольтамперная характеристика диода. Конденсатор емкости $C=100$ мкФ, заряженный до напряжения $U=5$ В, подключается через диод к резистору с сопротивлением $R=100$ Ом. Какое количество тепла выделится на резисторе при разрядке конденсатора?*



Пока ток разряда превышает $I_0=10$ мА, напряжение на диоде остается постоянным и равным $U_0=1$ В. К тому моменту, когда ток упадет до значения I_0, напряжение на конденсаторе окажется равным

$$U_1=U_0+RI_0.$$

Заряд, протекший к этому времени по цепи, равен

$$q=C(U-U_0-RI_0).$$

Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{CU^2}{2}-\frac{C(U_0+RI_0)^2}{2}=U_0q+W_1,$$

где W_1 — тепло, выделившееся на резисторе до этого момента. Далее диод просто эквивалентен резистору с сопротивлением $r=U_0/I_0$. При дальнейшем разряде на резисторе R выделяется тепло

$$W_2=\frac{CU_1^2}{2}\;\frac{R}{R+r}=\frac{C(U_0+RI_0)^2}{2}\;\frac{R}{R+\frac{U_0}{I_0}}.$$

Общее количество тепла, которое выделится на резисторе при разряде конденсатора, равно

$$W=W_1+W_2.$$

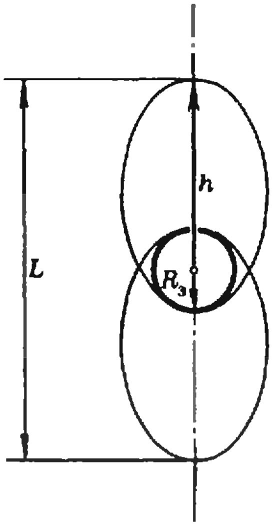
Подставляя значения W_2 и $W_1=\frac{C}{2}\left[U^2-(U_0+RI_0)^2\right]-U_0q$, находим

$$W=\frac{C}{2}\{(U-U_0)^2+RI_0U_0\}=8{,}5\cdot10^{-4}\text{ Дж}.$$

Е. Сурков, Е. Юносов

◆

Ф643. *С южного и северного полюсов Земли одновременно стартуют две ракеты с одинаковыми начальными скоростями, направленными горизонтально. Через время $\tau=3$ ч 20 мин ракеты оказались на максимальном удалении друг от друга. Определить максимальное расстояние между ракетами. Ускорение свободного падения на Земле считать известным. Радиус Земли $R_3=6400$ км.*



Ракеты будут двигаться по одинаковым эллиптическим орбитам (см. рисунок), которые касаются Земли на Северном и Южном полюсах. На максимальном удалении друг от друга ракеты окажутся через половину периода обращения. Таким образом, $T=2\tau$. Максимальное удаление h ракет от центра Земли (в апогее) можно найти, исходя из второго закона Кеплера, из которого следует, что при одинаковых периодах обращения на разных орбитах (в том числе и на круговой) большие полуоси орбит равны друг другу. Найдем радиус r круговой орбиты с периодом обращения T. Линейная скорость на такой орбите есть $2\pi r/T$. Приравнивая центростремительное ускорение ускорению силы тяжести, получим

$$\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2\frac{1}{r}=G\frac{M_3}{r^2}=\frac{gR_3^2}{r^2}.$$

Отсюда

$$r=\sqrt[3]{\frac{gR_3^2T^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{gR_3^2\tau^2}{\pi^2}}\approx18\cdot10^6\text{ м}.$$

На основании второго закона Кеплера $h+R_3=2r$. Таким образом, максимальное расстояние L между ракетами равно

$$L=2h=2(2r-R_3)=5.92\cdot10^6\text{ м}=59\,200\text{ км}.$$

Интересно отметить, что задача допускает и другие решения, так как ракеты оказываются на максимальном расстоянии друг от друга не только через полпериода обращения, но и через $\frac{3}{2}T$, $\frac{5}{2}T$ и т. д. В общем случае условию задачи удовлетворяют все орбиты с периодами обращения $T_n=\frac{2}{n}\tau$ (n — любое нечетное число), для которых $h_n>R_3$. Последнее условие можно переписать в виде $r_n>R_3$, где r_n — радиус круговой орбиты с периодом обращения T_n. Найденное ранее значение r соответствует случаю $n=1$. Для всех прочих r_n имеем.

$$r_n = \frac{r}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

Числовой расчет показывает, что возможен еще случай с $n=3$. $r_3 \approx 8{,}6 \cdot 10^6$ м; $L_3 = 21{,}6 \cdot 10^6$ м $= 21\,600$ км. Для $n=5, 7, \ldots$ условие $r_n > R_3$ не выполняется.

С. Козел

◆

Ф644. *Цепь, состоящая из двух конденсаторов с емкостями C_1 и C_2 ($C_2 > C_1$) и двух идеальных диодов $Д_1$ и $Д_2$ (рис. 1), подключена к источнику переменного напряжения $u = U_0 \cos \omega t$. Определите зависимость напряжения на конденсаторах от времени в установившемся режиме. Изобразите полученные зависимости на графике. Сопротивление идеального диода в прямом направлении равно нулю, в обратном — бесконечности.*

Предположим, что цепь подключают к источнику в момент $t=0$. В этом случае конденсатор C_2 достаточно быстро зарядится через диод $Д_1$ до напряжения, равного амплитудному значению U_0 переменного напряжения. Конденсатор C_2 получит заряд

$$Q_0 = U_0 C_2.$$

В последующие моменты времени диоды $Д_1$ и $Д_2$ будут закрыты, то есть не будут пропускать ток, так как потенциалы катодов будут всегда больше потенциалов анодов и диоды идеальные (их сопротивления в закрытом состоянии равны бесконечности). Схема будет вести себя так, как будто диоды $Д_1$ и $Д_2$ отключены; поэтому заряд Q_0 будет сохраняться.

В таком случае через последовательно соединенные конденсаторы будет протекать переменный ток

$$i = I_0 \sin \omega t = \left(U_0 \omega \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right) \sin \omega t,$$

где $I_0 = U_0 \omega \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ — амплитуда тока, U_0, ω — амплитуда и частота переменного напряжения. Переменный ток будет создавать переменное напряжение на каждом конденсаторе:

$$u_{c1\sim} = \frac{I_0}{\omega C_1} \cos \omega t = U_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cos \omega t,$$

$$u_{c2\sim} = -\frac{I_0}{\omega C_2} \cos \omega t = -U_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cos \omega t.$$

Кроме этого переменного напряжения, на конденсаторах будет присутствовать постоянная составляющая напряжения за счет заряда конденсатора C_2 до напряжения U_0. Для нахождения этой постоянной составляющей напряжения U запишем закон сохранения заряда:

$$C_2 U_0 = C_1 U + C_2 U.$$

Отсюда

$$U = \frac{C_2 U_0}{C_1 + C_2}.$$

Таким образом, суммарные напряжения на конденсаторах будут равны

$$u_{c1} = u_{c1\sim} - U = U_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cos \omega t - \frac{C_2 U_0}{C_1 + C_2},$$

$$u_{c2} = u_{c2\sim} + U = U_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cos \omega t + \frac{C_2 U_0}{C_1 + C_2}.$$

Графики этих зависимостей, построенные для $C_2 = 2C_1$, показаны на рисунке 2.

Заметим, что если подключение цепи к источнику происходит в момент времени $t \neq 0$, то схема придет в установившийся режим через некоторое время, когда диод $Д_1$ откроется и конденсатор C_2 зарядится до напряжения U_0.

В. Скороваров

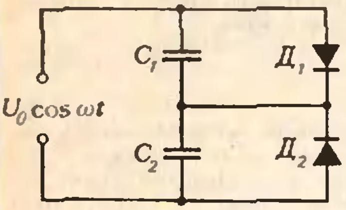


Рис. 1.

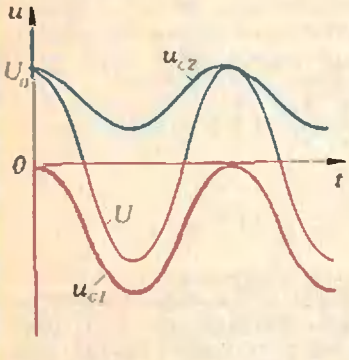


Рис. 2.

◆

Ф645. *Громкоговоритель имеет диффузор с площадью поперечного сечения $S = 300$ см^2 и массой $m = 5$ г.*

Будем считать, что в свободном пространстве при достаточно низких частотах звуковых колебаний давление воздуха перед диффузором и за ним одно и то же. Тогда резонансная частота диффузора определяется его массой m и жесткостью k

Резонансная частота диффузора $\nu_0=50$ Гц. Какой окажется его резонансная частота, если поместить громкоговоритель на стенке закрытого ящика объема $V=40$ л. Расчет провести в предположении, что температура воздуха внутри ящика не изменяется при колебаниях диффузора.

подвеса:

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Когда громкоговоритель помещен в ящик, при колебаниях диффузора смещение его на малую величину x (например, в глубь ящика) приводит к изменению давления воздуха внутри ящика. Нетрудно показать, что изменение $\Delta V\approx Sx$ объема воздуха в ящике и изменение Δp давления (при $T=\text{const}$) связаны соотношением

$$p\cdot\Delta V=V\cdot\Delta p \Rightarrow \Delta p=\frac{p\cdot\Delta V}{V}=\frac{pSx}{V}.$$

Тогда возвращающая сила, действующая на диффузор, равна

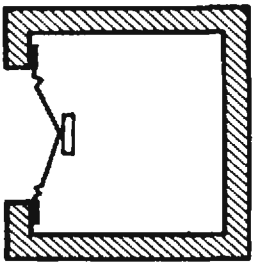
$$F=kx+\Delta p\cdot S=\left(k+\frac{pS^2}{V}\right)x.$$

Видно, что результирующая «жесткость» k_1 подвеса возросла в

$$\frac{k_1}{k}=\frac{k+pS^2/V}{k}=1+\frac{pS^2}{kV}=1+\frac{pS^2}{4\pi^2m\nu^2V_2}\approx 5{,}5 \text{ раз}.$$

Таким образом, резонансная частота диффузора в этом случае равна

$$\nu_1=\nu\sqrt{\frac{k_1}{k}}\approx 117 \text{ Гц}.$$



Примечание. Используя закон Бойля — Мариотта для определения изменения давления в ящике, мы считали, что всюду внутри ящика давление одно и то же. Длина волны, соответствующая частоте ν_1 ($\lambda\approx3$ м), существенно больше размеров ящика ($\sim0{,}3\div0{,}4$ м) и диффузора, так что это условие выполняется достаточно точно.

Более точную оценку можно провести, считая процесс не изотермическим, а адиабатным. Однако и эта оценка будет приблизительной. Для точного расчета необходимо учитывать и форму ящика, и много других факторов.

А. Зильберман

◆

Ф646. *Направленный поток электронов вылетает из тонкой широкой щели со скоростью $v=10^5$ м/с. Концентрация электронов в потоке $n=10^{10}$ частиц/м^3. На каком расстоянии от щели толщина пучка увеличится в 2 раза? Масса электрона $m=9\times10^{-31}$ кг, заряд электрона $e=1.6\cdot10^{-19}$ Кл, диэлектрическая постоянная $\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}$ Ф/м.*

Будем считать, что тонкий и широкий пучок электронов действует на крайние электроны (определяющие толщину пучка) как бесконечная заряженная плоскость. Поверхностная плотность заряда в нашем случае равна $\sigma=edSn/S=edn$ (d — толщина пучка, S — площадь его «поверхности»). Тогда

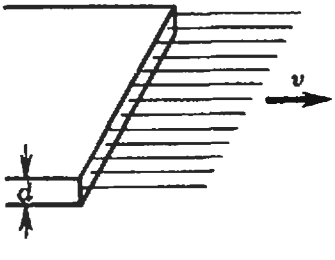
$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{edn}{2\varepsilon_0}.$$

Скорость электронов вдоль пучка неизменна; в направлении, перпендикулярном пучку, электроны движутся с ускорением $a=Ee/m$. Толщина пучка увеличится в 2 раза, когда крайние электроны сместятся на $d/2$. Это произойдет через время $t=l/v$, где l — расстояние от щели. Таким образом,

$$\frac{d}{2}=\frac{at^2}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{Ee}{m}\left(\frac{l}{v}\right)^2.$$

Отсюда находим l:

$$l=v\sqrt{\frac{2\varepsilon_0m}{e^2n}}\approx 2{,}5\cdot10^{-2} \text{ м}.$$



Ясно, что при малой концентрации электронов поле, создаваемое пучком, нельзя считать эквивалентным полю заряженной плоскости. Модель, принятая нами, разумна, если поле создается большим количеством зарядов, то есть влияние отдельного (соседнего) электрона мало. Это условие запишется так:

$$\frac{e}{4\pi\varepsilon_0r^2}\ll\frac{edn}{2\varepsilon_0}, \text{ где } r\sim n^{-\frac{1}{3}}, \text{ или}$$

$$d\gg\frac{1}{2\pi\sqrt[3]{n}},$$

то есть при толщине пучка $0{,}5\div1$ мм и более условие хорошо выполняется

А. Зильберман

КВАНТ ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Задачи

1. В ребусе, изображенном на рисунке, разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым — одинаковые. Расшифруйте ребус так, чтобы все шесть равенств (например, АЕЕ — МКК=МКК) одновременно стали верными.

2. Все числа ряда

0, 4, 18, 48, ?, 180,...

получены по некоторой формуле. По какой именно? Какое число пропущено?

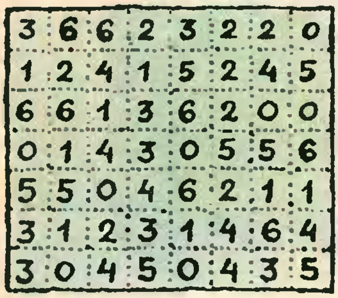
3. Впишите в кружки на рисунке числа так, чтобы каждое следующее в направлении стрелок число получалось из предыдущего при помощи действия, указанного над стрелкой.

4. Докажите, что площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой перпендикулярны, равна квадрату ее высоты.

5. Натуральное число M состоит из 1980 единиц и 1983 двоек, а остальные цифры — нули. Может ли это число быть точным кубом?

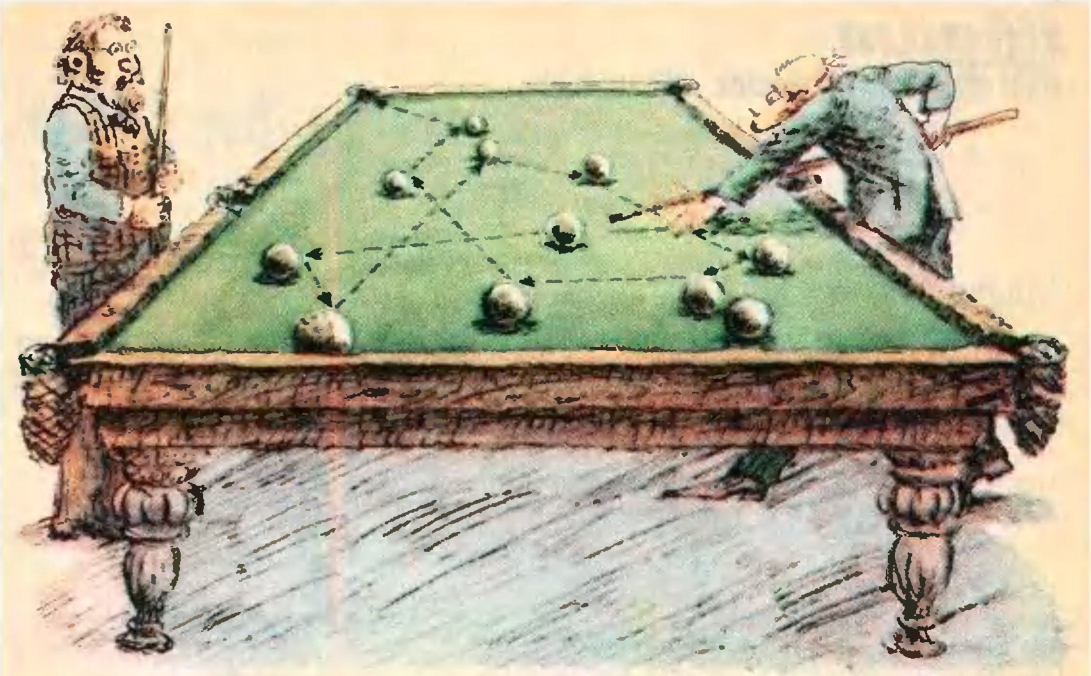
6. В прямоугольниках на рисунке сумма чисел в каждой строке одна и та же. Суммы чисел в каждом столбце тоже равны между собой. Попробуйте сложить каждый из этих прямоугольников из комплекта домино.

Эти задачи нам предложили Э. Рекстин, В. Рошаховский, С. Сефибеков, Г. Шишкина



3	6	6	2	3	2	2	0
1	2	4	1	5	2	4	5
6	6	1	3	6	2	0	0
0	1	4	3	0	5	5	6
5	5	0	4	6	2	1	1
3	1	2	3	1	4	6	4
3	0	4	5	0	4	3	5

0	1	2	5	1	4	5	6
0	1	2	5	1	4	5	6
5	2	6	3	3	0	4	1
5	2	6	3	3	0	4	1
3	3	4	4	2	2	3	3
4	6	0	0	6	6	0	2
4	6	1	1	5	5	0	2



Г. Гальперин

Бильярд

> *Играя в бильярд, я одновременно беру уроки физики и геометрии.*
>
> С. М. Буденный

Доводилось ли вам играть в бильярд? Если не доводилось, то наверняка приходилось наблюдать, как играют другие.

Проследим за движущимся шаром. Пока он не столкнется со стенкой или другим шаром, он движется прямолинейно. При ударе о стенку шар отражается от нее практически так же, как луч света отражается от плоского зеркала: *угол падения равен углу отражения* (рис. 1).

В реальном бильярде существует трение, шар при соударении теряет часть механической энергии и может начать вращаться из-за нецентрального удара кия или столкновения с другими шарами. Теорию движения шара в бильярде описал французский физик Кориолис в книге «Математическая теория бильярдной игры».

Мы будем здесь рассматривать идеальный бильярд, то есть будем считать, что шары являются точками, движутся без трения и при соударении (со стенкой или с другими шарами) не теряют механической энергии.

На рисунке 2 показана замысловатая траектория, по которой движется одиночный шар после удара кием. Траектория может оборваться, если шар попадет в лузу, может

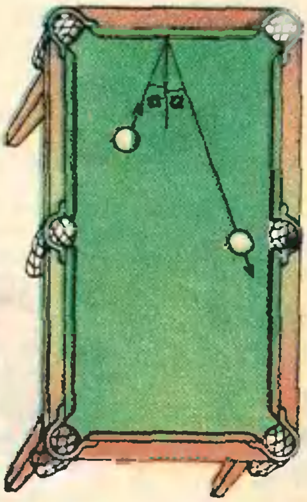


Рис. 1.

замкнуться, а может петлять бесконечно долго, заполняя все бóльшую часть стола.

Рассмотрим такую задачу: пусть на бильярдном столе находится один шар; под каким углом следует направить его из точки A, чтобы он после заданного числа отражений попал в точку B (в частности, в лузу)?

При решении этой и многих других аналогичных бильярдных задач основную роль играет процедура «зеркального отражения» или «выпрямления бильярдной траектории»: отразим симметрично прямоугольник (исходный бильярд) относительно всех его сторон; все полученные таким образом прямоугольники вновь отразим относительно всех их сторон, и так далее до бесконечности (на рисунке 3 показаны также образы точки B при этих симметриях); в результате этих отражений любая траектория «распрямляется» (например, на рисунке 3 траектория $AC_1C_2C_3B$ последовательно переходит в $AC_1D_1D_2B'$, $AC_1D_1E_1B''$, $AC_1D_1E_1B'''$). Если полученная «выпрямленная траектория» проходит через образ точки B в одном из прямоугольников, то, очевидно, траектория шара в исходном прямоугольнике пройдет через B. Поэтому, для того чтобы пустить шар из точки A так, чтобы он после заданного числа отражений о стенки бильярда попал в точку B, нужно провести такой отрезок с началом в точке A и концом в одном из образов точки B, чтобы он пересек это же самое число раз линии сетки «клетчатой плоскости». Проделав обратную процедуру «свертывания» проведенного отрезка, превратим его в искомую траекторию в исходном бильярде (рис. 3).

Кроме обычного — прямоугольного — бильярда, можно рассматривать и другие. Например, можно рассмотреть бильярд в равностороннем треугольнике. Поскольку одинаковыми равносторонними треугольниками можно без щелей и перекрытий замостить всю плоскость, и здесь применима процедура «выпрямления бильярдной траектории» (рис. 4).

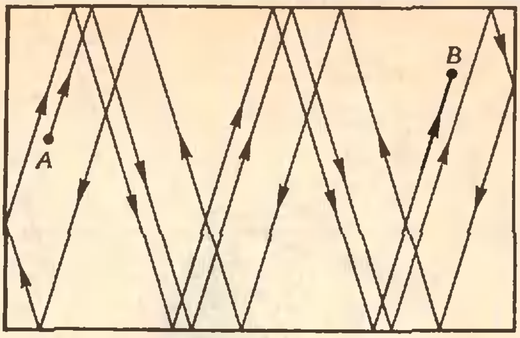


Рис. 2.

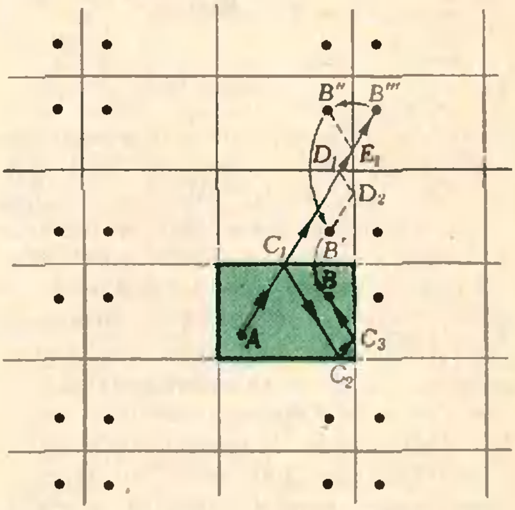


Рис. 3.

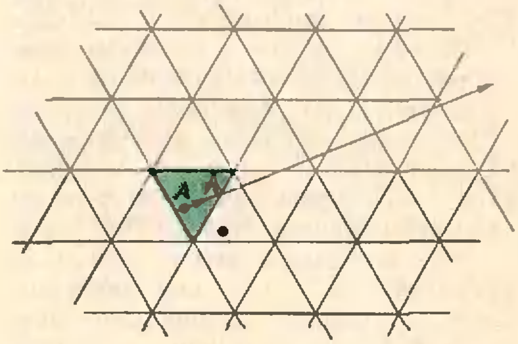


Рис. 4.

Оказывается, траектория бильярдного шара решает следующую широко известную задачу: каков тот кратчайший путь, по которому должна ползти пчела из точки A в точку B внутри равностороннего треугольника, чтобы сначала насладиться медом на одной стороне треугольника, потом сахаром — на другой стороне и, наконец, вареньем — на третьей? (Предполагается, что сторона полностью выма-

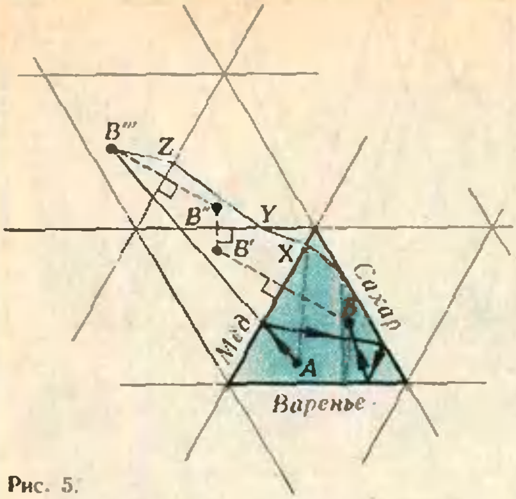


Рис. 5.

зана соответствующим сладким веществом.) Ответ приведен на рисунке 5. На этом рисунке синим цветом показан также другой (произвольный «не бильярдный») путь движения пчелы: после отражений он превращается в синюю ломаную $AXYZB'''$ с длиной, большей длины отрезка AB''' — «выпрямленной траектории» бильярдного шара.

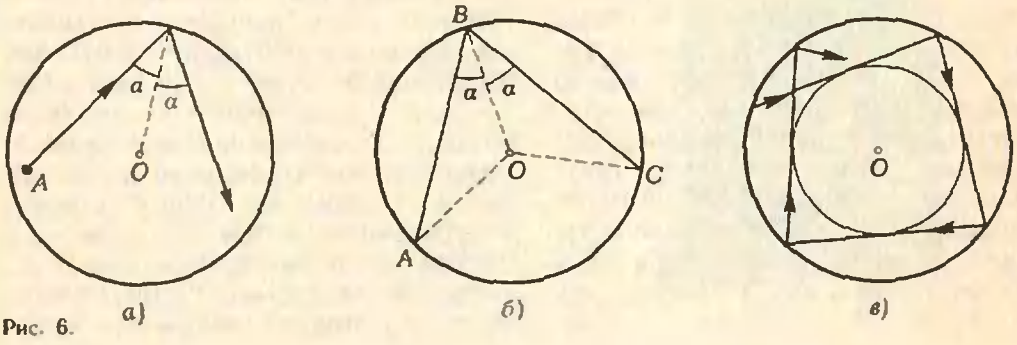
Любопытны траектории на круглом бильярде (рис. 6,*а*). Во-первых, траектория (после первого отражения) состоит из звеньев одинаковой длины, что легко следует из конгруэнтности треугольников OAB и OCB (рис. 6,*б*). Середины всех звеньев траектории удалены от центра бильярда на одинаковое расстояние и, таким образом, расположены на окружности с тем же центром. Тем самым вся бильярдная траектория расположена в кольце (рис. 6,*в*).

Эта траектория может оказаться замкнутой, и тогда она образует либо правильный многоугольник, вписанный в окружность, либо самопересекающуюся звезду (рис. 7). Такие траектории называются *периодическими*.

Ясно, что вопрос «Как послать шар из точки A на окружности, чтобы он после n отражений оказался в исходной точке?» эквивалентен вопросу «Как построить правильный $(n+1)$-угольник с вершиной в точке A?». Поисками ответа на последний вопрос долгое время занимались древнегреческие математики, но ответа так и не нашли. Лишь к началу XIX в. великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс показал, в каких случаях искомое построение возможно с помощью циркуля и линейки, а в каких невозможно («Квант», 1977, № 8, с. 5).

Если же траектория не замкнутая, то она заполняет практически все кольцо, а именно *проходит сколь угодно близко к любой точке кольца.*

Докажем это утверждение. Фиксируем одну из точек отражения на окружности, обозначим ее через A. Двигаясь от точки A, мы будем последовательно получать на окружности новые точки отражения на одинаковом (дуговом) расстоянии α друг от друга, пока не перескочим точку A. Ближайшую из двух точек к точке A — до перескока и после перескока через нее — обозначим через B. Длина β дуги AB не больше $\frac{\alpha}{2}$: $\beta \leqslant \frac{\alpha}{2}$. Начав двигаться от точки B, мы через некоторое число шагов попадем в точку на окружности, отстоящую от точки B на расстоянии β; затем попадем в точку, отстоящую от B на 2β, и т. д. (рис. 8). Можно считать, что мы движемся теперь по окружности шагами величиной β, по крайней мере вдвое меньшей, чем величина шага при начальном движении от точки A. После определенного числа шагов мы впервые перескочим точку B и выберем после этого ближайшую к ней (из двух точек — до и после перескока) точку C. Пусть длина дуги BC равна γ, тогда $\gamma < \frac{\beta}{2} < \frac{\alpha}{4}$. Как и выше, получим, что можно



а) б) в)

Рис. 6.

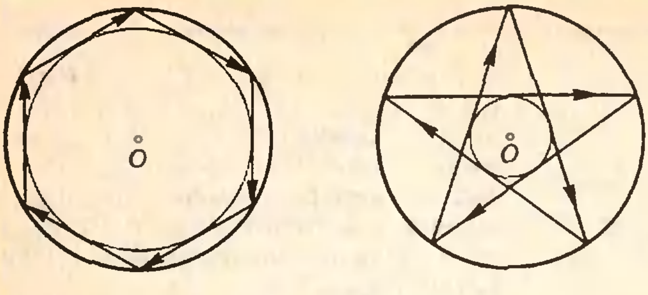


Рис. 7.

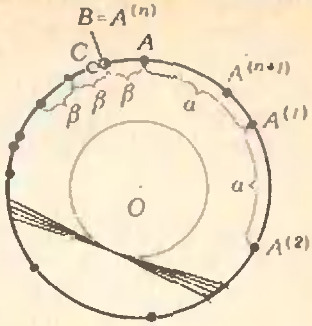


Рис. 8.

считать теперь величину прыжка равной γ. Повторив описанный процесс k раз, получим величину прыжка, не большую $\frac{\alpha}{2^k}$. Но при больших k величина $\frac{\alpha}{2^k}$ становится очень маленькой, так что мы обязательно попадем в любую, сколь угодно малую дугу, произвольно выбранную на окружности.

Итак, доказано, что точки отражения плотно заполняют окружность. Проведя касательные к внутренней окружности кольца из всех точек отражения на окружности, получим, что бильярдная траектория плотно заполняет все кольцо, что и требовалось.

Можно рассматривать бильярды и других форм; их общим свойством является выполнение закона бильярда: угол падения равен углу отражения.

Идеи бильярдной игры часто находят себе применение в различных областях современной математики, подчас неожиданных (например, в теории чисел), а сама бильярдная игра служит хорошей моделью реальных физических процессов, поскольку, например, молекулы газа, сталкиваясь с границей сосуда и между собой, ведут себя так же, как шары на зеленом сукне бильярда.

О более глубоких связях между бильярдом и математикой вы можете прочитать в двух статьях А. Землякова — «Квант», 1976, № 5 и 1979, № 9.

Задачи

1. В точечное отверстие прямоугольного бильярда влетает частица и начинает отражаться от его бортов по закону бильярда. Может ли частица с некоторого момента начать двигаться внутри бильярда по замкнутой траектории?

2. В прямоугольном бильярде точечный шар движется по замкнутой траектории, не проходящей через вершины. Величина угла между какими-то двумя звеньями равна 90°.

а) Может ли у траектории быть **4** звена? Если да, то при каком соотношении сторон бильярда?

б) А может ли быть 5 звеньев? 6 звеньев? 17 звеньев? 1980 звеньев?

3*. В прямоугольном бильярде из точки A параллельно диагонали посылается точечный шар. Найти множество таких точек M в бильярде, что шар, посланный из M одновременно с первым шаром и с той же скоростью (как по величине, так и по направлению), столкнется с ним.

4. В бильярде, имеющем форму равностороннего треугольника ($\triangle XYZ$), найти такие точки A и B, чтобы шар, посланный из A, ударившись о стороны XY, YZ и ZX (именно в этом порядке!), попал в B и чтобы длина пройденного им пути была максимально возможной. Во сколько раз длина этого пути превосходит длину стороны треугольника?

5. В круглом бильярде точечный шар движется по траектории γ. Оказалось, что какие-то два звена бильярдной траектории параллельны. Может ли траектория γ быть замкнутой и иметь 1717 звеньев? Быть незамкнутой?

6. В угол, градусная величина которого равна α, влетает частица; отразившись от его сторон максимально возможное число раз, она перестает сталкиваться с его сторонами. Известно, что это максимальное число столкновений равно 1800. В каких пределах может меняться величина α?

ПОПРАВКА

В статье Л. Баканиной «Задачи о спутниках» («Квант», 1981, № 1) в условии четвертой задачи неправильно задано значение углового ускорения — оно должно быть положительным: $\beta = 3 \cdot 10^{-13}$ рад/с^2. В связи с этим ответ задачи должен быть другим — спутник окажется на высоте $H' = 497$ км.

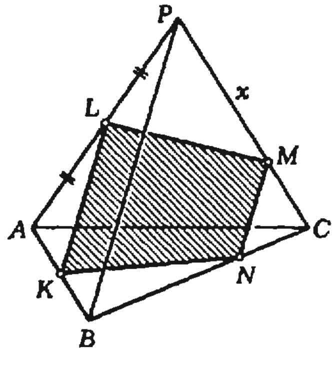
В. Рыжик

Задача как задача

В некоторой школе девятиклассники решали задачу: *В правильном тетраэдре PABC на ребре PC взята точка M, K — середина стороны AB. Через K и M проведена плоскость, параллельная прямой PB. Выразите периметр сечения через расстояние $|PM|$, если длина ребер тетраэдра равна 1. Вычислите его наибольшее и наименьшее значения.*

К доске вызвали Васю Нуликова. «Ну, что ж! Задача как задача — на производную,— подумал Вася.— С геометрическим содержанием. Говорят, такие бывают на экзаменах».

«Проведем из точки K прямую, параллельную прямой PB,— начал он.— Поскольку и точка K, и прямая PB принадлежат плоскости APB, проведенная прямая тоже будет лежать в плоскости APB. Обозначим точку пересечения проведенной прямой с ребром AP через L (см. рисунок). Из точки M тоже проведем прямую, параллельную (PB). Точку ее пересечения со стороны BC обозначим через N. Из $(KL) \parallel (PB)$ и $(MN) \parallel (PB)$ следует $(KL) \parallel (MN)$. Значит, прямые KL и MN лежат в одной плоскости, то есть $KLMN$ — плоский четырехугольник. Это и есть сечение, о котором говорится в условии задачи. Положим $|PM| = x$. Очевидно, $0 \leqslant x \leqslant 1$.»



Постепенно на доске появилось:

$$|KL| = \frac{1}{2}, \ |PL| = \frac{1}{2},$$
$$|LM| = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2-2x+1},$$
$$|MN| = |CM| = 1-x,$$
$$|BN| = x, \quad |KB| = \frac{1}{2}, \quad |KN| = |LM|,$$
$$P_{KLMN} = \frac{3}{2} - x + \sqrt{4x^2-2x+1}\ .$$

«Периметр выразили, — сказал Вася. — Рассмотрим теперь функцию

$$\Phi(x) = \frac{3}{2} - x + \sqrt{4x^2-2x+1}\ .»$$

Продифференцировав и приведя к общему знаменателю

$$\Phi'(x) = \frac{4x-1-\sqrt{4x^2-2x+1}}{\sqrt{4x^2-2x-1}}\ ,$$

Вася отметил, что знаменатель в нуль не обращается, и стал решать уравнение $\Phi'(x) = 0$:

$$4x-1-\sqrt{4x^2-2x+1} = 0,$$
$$4x-1 = \sqrt{4x^2-2x+1}\ ,$$
$$\begin{cases} (4x-1)^2 = 4x^2-2x+1, \\ 4x-1 \geqslant 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} 12x^2-6x = 0, \\ x \geqslant \frac{1}{4}\ , \end{cases}$$
$$x = \frac{1}{2}\ .$$

«Слева меньше, справа больше,— сказал Вася, видимо сравнивая производную с нулем.— Кроме того, функция Φ непрерывна при $x = \frac{1}{2}$. Значит, $x = \frac{1}{2}$ — точка ее минимума. Сосчитаем теперь значения функции Φ в ее единственной точке экстремума $x = \frac{1}{2}$ и в концах отрезка $[0;1]$: $\Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, $\Phi(0) = \frac{5}{2}$, $\Phi(1) =$

$=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$. Поскольку $2<\frac{1}{2}+\sqrt{3}<\frac{5}{2}$,

$$\min_{[0;\,1]}\Phi(x)=\Phi\left(\frac{2}{1}\right)=2$$

$$\max_{[0;\,1]}\Phi(x)=\Phi(0)=\frac{5}{2}.$$

Итак, наименьшее значение P_{KLMN} равно 2, наибольшее равно $\frac{5}{2}$».

Не успели все переписать в тетради этот ответ, как раздался голос Феди Крестикова.

«Тут что-то не так,— сказал Федя.— Если $x=0$, то M совпадает с P, а тогда сечение превратится в треугольник APB с периметром 3, а $3>\frac{5}{2}$.»

Вася молча, растерянно посмотрел на учителя. В классе стало тихо...

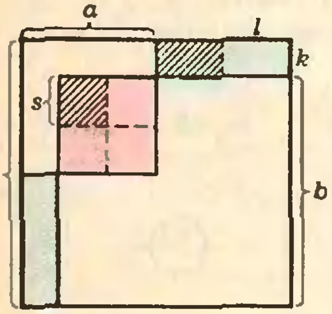
В той школе, в том классе в конце концов поняли, в чем дело. А вы?

Еще раз о пифагоровых тройках

Тройка натуральных чисел (3, 4, 5) является *пифагоровой:* $3^2+4^2=5^2$. Как найти все пифагоровы тройки? Об этом в «Кванте» уже писали (1979, № 4, с. 40). Здесь указывается еще один способ решения этой задачи.

Очевидно, если (a, b, c) — пифагорова тройка, то и любая тройка (ak, bk, ck), где k N, пифагорова. Если же какие-то два из чисел a, b, c имеют общий простой делитель p, то и третье число делится на p. Поэтому достаточно перечислить пифагоровы тройки с попарно взаимно простыми a, b, c.

Итак, пусть (a, b, c) — пифагорова тройка и числа a, b, c попарно взаимно просты.



Числа a и b одновременно не могут быть четными. Они не могут быть одновременно и нечетными, так как в противном случае сумма их квадратов делится на 2, но не делится на четыре, и, следовательно, не может быть квадратом натурального числа. Итак, одно из чисел a и b должно быть четным, второе нечетным; при этом число c нечетно. Будем считать, что a нечетно, а b четно.

Нарисуем квадрат со стороной длины c. В его верхний левый угол впишем квадрат со стороной длины a, а в правый нижний угол — квадрат со стороной длины b (см. рисунок). Эти два квадрата пересекаются по красному квадрату, а в большом квадрате остаются непокрытыми два синих прямоугольника. Из условия $a^2+b^2=c^2$ следует, что площадь красного квадрата равна сумме площадей синих прямоугольников.

Длины сторон синих прямоугольников равны $c-a$ и $c-b$, а длина стороны красного квадрата равна $a+b-c$. Поскольку числа $c-a$ и $a+b-c$ четные, каждый из синих прямоугольников можно разделить на два одинаковых прямоугольника, а красный квадрат — на четыре одинаковых квадрата с целыми длинами сторон. Обозначим длины сторон заштрихованного прямоугольника через k и l $(k=c-b,\ 2l=c-a)$, а длину стороны заштрихованного квадрата — через s $(2s=a+b-c)$. Из равенства их площадей следует $kl=s^2$.

Из попарной взаимной простоты чисел a, b и c следует взаимная простота чисел k и l. Действительно, допустим, что числа k и l имеют общий простой множитель p. Поскольку $b^2=c^2-a^2=(c-a)(c+a)=2l(c+a)$, b делится на p. Но $c=b+k$. Значит, c также делится на p, что противоречит взаимной простоте b и c.

Вернемся к равенству $kl=s^2$. Поскольку k и l взаимно просты, а произведение их — точный квадрат, каждое из этих чисел само обязано быть квадратом. Пусть $k=m^2$, $l=n^2$. Тогда $s=m\cdot n$.

Выразим теперь a, b и c через m и n:

$$a=k+2s=m^2+2mn=(m+n)^2-n^2,$$

$$b=2l+2s=2n^2+2mn=2n(m+n),$$

$$c=k+2l+2s=m^2+2n^2+2mn=(m+n)^2+n^2.$$

Положив $m+n=t$, получим

$$a=t^2-n^2,$$
$$b=2nt,$$
$$c=t^2+n^2.$$

Легко проверить, что при любых t и n эти формулы дают, если $t>n$, пифагорову тройку. Если t и n — взаимно простые числа разной четности, то числа a, b, c будут попарно взаимно простыми.

З. Зурабишвили

Н. Ростовцев

Приближенные вычисления при решении задач по физике

Приступая к решению любой физической задачи, прежде всего надо выяснить, какие явления или процессы играют существенную роль, а какие — несущественную. Пренебрежение несущественными явлениями неминуемо ведет к пренебрежению относительно малыми величинами, то есть к приближенным вычислениям. Знание формул для приближенных вычислений и умение ими пользоваться часто очень упрощают расчеты.

Из курса математики известно, что выражение $(1+x)^n$ при $|x|<1$ можно представить в виде

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+ \\ +\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots \qquad (1)$$

Здесь n — любое действительное число. При натуральном n эта сумма обрывается на члене n-й степени; полученная формула называется формулой Ньютона.

Пусть имеется выражение $(a+b)^n$, тогда из (1)

$$(a+b)^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n= \\ =a^n\left(1+n\frac{b}{a}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\ldots\right).$$

Если $|b|\ll|a|$, слагаемыми, содержащими отношение b/a во второй степени и выше, можно пренебречь и ограничиться только первыми двумя слагаемыми:

$$\left(a+b\right)^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\approx a^n\left(1+n\frac{b}{a}\right). \qquad (2)$$

Какая ошибка возникает при использовании этой приближенной формулы? Для оценки вполне можно считать, что ошибка равна третьему слагаемому в разложении:

$$\Delta y=a^n\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{b}{a}\right)^2. \qquad (3)$$

При решении физических задач часто вполне допустимы расчеты с точностью до одного процента. Из выражения (3) можно найти максимальное значение величины b/a, при котором точность расчета не выходит за допустимые рамки.

Очень просты и удобны формулы для приближенного вычисления значений тригонометрических функций. Если угол α, выраженный в радианах, достаточно мал, можно принять

$$\sin\alpha\approx\alpha, \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}\alpha\approx\alpha, \qquad (5)$$

$$\cos\alpha\approx 1. \qquad (6)$$

Расчеты показывают, что ошибка не превышает одного процента, если угол α удовлетворяет условиям

$\alpha\leqslant 23°\approx 4{,}0\cdot 10^{-1}$ рад для $\sin\alpha$,

$\alpha\leqslant 18°\approx 3{,}1\cdot 10^{-1}$ рад для $\operatorname{tg}\alpha$,

$\alpha\leqslant 8°\approx 1{,}4\cdot 10^{-1}$ рад для $\cos\alpha$.

(Это можно проверить, воспользовавшись, например, таблицами Брадиса.)

В физике довольно часто встречается показательная функция $y=a^x$. При малых значениях x выполняется приближенное равенство

$$a^x\approx 1+\frac{\lg a}{0{,}43}x. \qquad (7)$$

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач.

Задача 1. *Сопротивление R проводника измеряют с помощью амперметра и вольтметра по схеме, изображенной на рисунке 1. Сопротивление вольтметра $R_V>R$. Определите ошибку, которую допускают,*

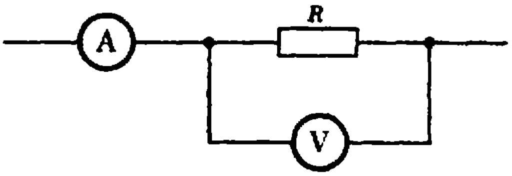


Рис. 1.

вычисляя сопротивление проводника без учета тока, текущего через вольтметр.

Сопротивление проводника, рассчитанное по показаниям амперметра и вольтметра, без учета сопротивления вольтметра, равно

$$R'=\frac{U}{I},$$

где U — напряжение на вольтметре, I — ток, текущий через амперметр.

Истинное сопротивление равно

$$R=\frac{U}{I-I_V}=\frac{U}{I-U/R_V}.$$

Искомая ошибка

$$\Delta R=R-R'=\frac{U}{I-U/R_V}-\frac{U}{I}=$$

$$=\frac{U}{I}\left(\left(1-\frac{U/R_V}{I}\right)^{-1}-1\right).$$

Так как $R_V \gg R$, то $U/R_V \ll I$. Применяя формулу (2), получаем

$$\Delta R=R-R'\approx$$

$$\approx\frac{U}{I}\left(1+\frac{U/R_V}{I}-1\right)\approx\frac{U^2}{I^2R_V}.$$

З а д а ч а 2. *На какую долю изменится сила тяжести при подъеме на высоту $h=1$ км над поверхностью Земли? Радиус Земли считать равным $R=6400$ км.*

Сила тяжести тела массой m у поверхности Земли равна

$$F_0=G\frac{mM}{R^2},$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса Земли.

По мере удаления от поверхности Земли сила тяжести уменьшается, и на высоте h она равна

$$F_1=G\frac{mM}{(R+h)^2}.$$

Из выражений для F_0 и F_1 найдем

$$\frac{F_0-F_1}{F_0}=1-\frac{F_1}{F_0}=1-\frac{R^2}{(R+h)^2}=$$

$$=1-\frac{1}{(1+h/R)^2}=1-\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2}.$$

Поскольку $h \ll R$, то есть $h/R \ll 1$, используя формулу (2), получаем

$$\frac{F_0-F_1}{F_0}\approx 1-\left(1-2\frac{h}{R}\right)=2\frac{h}{R}\approx 3\cdot 10^{-4}.$$

З а д а ч а 3. *В теории относительности кинетическую энергию частицы $E_к$ подсчитывают по формуле $E_к=E-E_0$, где E — энергия движущейся частицы, а E_0 — энергия покоящейся частицы. Покажите, что при скорости частицы $v \ll c$ (c — скорость света) кинетическая энергия приближенно равна $m_0v^2/2$, где m_0 — масса покоящейся частицы.*

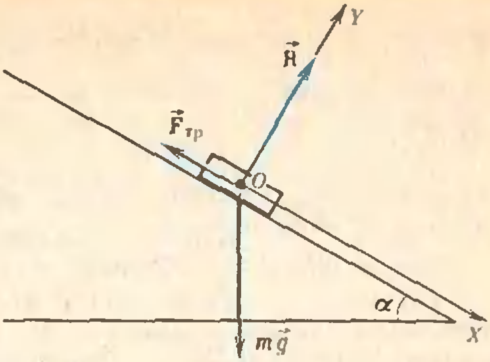


Рис. 2.

Согласно теории относительности

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \text{ и } E_0=m_0c^2.$$

Отсюда

$$E_к=E-E_0=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-1\right)=$$

$$=m_0c^2\left(\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}-1\right).$$

Так как $v \ll c$, то есть $v/c \ll 1$, а значит, и $v^2/c^2 \ll 1$, применяя формулу (2), найдем

$$E_к\approx m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-1\right)=\frac{m_0v^2}{2}.$$

З а д а ч а 4. *Тело соскальзывает с наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha=7°$ с горизонтом. Найдите ускорение тела, если коэффициент трения тела о плоскость $\mu=3\cdot 10^{-2}$.*

На тело, движущееся по наклонной плоскости, действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, сила трения $\vec{F}_{тр}$, направленная вверх по наклонной плоскости, и сила нормальной реакции $\vec{R}$, перпендикулярная к наклонной плоскости. Спроектируем силы на оси координат OX и OY, как показано на рисунке 2, и запишем уравнения движения:

$$mg\sin\alpha-F_{тр}=ma,$$
$$R-mg\cos\alpha=0.$$

Учитывая, что

$$F_{тр}=\mu R,$$

Рис. 3.

из уравнений движения найдем модуль ускорения тела:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Так как угол $\alpha < 8°$, можно воспользоваться формулами (4) и (6) и считать, что $\cos\alpha \approx 1$ и $\sin\alpha \approx \alpha$ (угол α должен быть выражен в радианах). Подставляя значения $\cos\alpha \approx 1$ и $\sin\alpha \approx 1{,}2 \cdot 10^{-1}$, получаем

$$a \approx g(1{,}2 \cdot 10^{-1} - 3 \cdot 10^{-2}) = \\ = 8{,}8 \cdot 10^{-1}\ \text{м/с}^2.$$

Задача 5. *Сколько атомов распадается за время $t = 1$ с в одном грамме радия? Период полураспада радия $T = 1600$ лет. В грамме радия содержится $N_0 = 2{,}6 \cdot 10^{21}$ атомов.*

Если число радиоактивных атомов в начальный момент времени равно N_0, то, согласно закону радиоактивного распада, по истечении времени t число N нераспавшихся атомов равно

$$N = N_0 2^{-\frac{t}{T}}.$$

Отсюда можно найти искомое число n распавшихся атомов:

$$n = N_0 - N = N_0(1 - 2^{-\frac{t}{T}}).$$

Поскольку $t/T \ll 1$, применив формулу (7), получим

$$n \approx N_0\left(1 - 1 + \frac{\lg 2}{0{,}43}\frac{t}{T}\right) \approx 3{,}7 \cdot 10^{10}.$$

Заметим, что активность радиоактивного препарата, в котором за 1 с распадается $3{,}7 \cdot 10^{10}$ атомов, принимают за единицу активности и называют 1 кюри.

В заключение несколько слов о численных расчетах при решении задач. Записывая краткое условие задачи, разумно все числовые значения представить в виде $a \cdot 10^n$ (где $1 \leqslant a < 10$), причем с одинаковой степенью точности. В подавляющем большинстве случаев достаточна точность в две значащие цифры. Тогда получившийся результат следует округлить тоже до двух значащих цифр (см., например, решение задачи 4).

Упражнения

1. Подсчитайте максимальные значения a, при которых погрешности формул $(1+a)^3 \approx 1 + 3a$ и $\sqrt{1-a} \approx 1 - \frac{1}{2}a$ не превышают 0,01.

2. Коэффициент линейного расширения латуни $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$. На сколько отстанут часы с латунным маятником за сутки вследствие повышения температуры на $\Delta T = 10$ К?

3. Определите ускорение свободного падения на высоте 10 км от Земли, если у поверхности оно равно 981 см/с^2. Радиус Земли $R = 6400$ км.

4. Определите напряженность поля системы точечных зарядов $+q$ и $-q$ в точке B (рис. 3), если $l \ll L$.

5. Автомашина массой $m = 2 \cdot 10^3$ кг трогается с места и идет в гору, наклон которой $\alpha = 0{,}02$. Пройдя расстояние $s = 100$ м, она развивает скорость $v = 32{,}4$ км/ч. Коэффициент сопротивления движению $k = 0{,}05$. Определите среднюю мощность, развиваемую мотором автомашины при этом движении.

Малый интеркосмос

(Начало см. на с. 8)

Коллективы школ, внешкольных учреждений, научно-технических объединений учащихся, принявшие наиболее активное и плодотворное участие в конкурсе, а также подразделения и коллективы предприятий, учреждений, вузов, оказавшие действенную помощь в работе юным техникам и исследователям, будут награждены почетными дипломами, а преподаватели, руководители кружков, консультанты из числа ученых и специалистов, под руководством которых выполнены работы, победившие на конкурсе,— дипломами и значками.

По всем вопросам организации и проведении конкурса следует обращаться в ЦК ВЛКСМ (Москва, Новая площадь 6/8, тел. 206—84—70, 206—89—92), на Центральную станцию юных техников Министерства просвещения РСФСР (тел. 289—75—44), в Московский городской Дворец пионеров (тел. 139—89—54, 139—84—88).

Н. Розов

Читатели советуют

В обширной редакционной почте «Кванта» есть довольно много писем и заметок наших читателей — учащихся, преподавателей, просто любителей математики, которые касаются тематики раздела «Практикум абитуриента». В тех случаях, когда речь идет о частных вопросах, редакция отвечает авторам лично. Но в целом ряде писем и заметок содержатся полезные замечания теоретического характера, излагаются приемы решения отдельных типов задач, высказываются интересные соображения, сообщаются методические советы, предлагаются самостоятельно составленные упражнения. Хотя эти соображения и задачи далеко не всегда являются новыми и оригинальными, с некоторыми из них целесообразно, на наш взгляд, познакомиться тем, кто готовится к приемным экзаменам в вузы. Не считая возможным публиковать подобные письма и заметки целиком, редакция решила подготовить очередную подборку материалов, составленную по письмам читателей, с необходимыми дополнительными комментариями.

Опыт приемных экзаменов показывает, что особые затруднения у поступающих вызывают задачи по геометрии. Хотя предлагаемые абитуриентам задачи для своего решения требуют лишь известных из школьного курса фактов и формул, далеко не все могут в конкретном чертеже к конкретной задаче увидеть, какие и где теоремы нужно использовать. Этому можно научиться только одним способом — достаточной практикой в решении задач. Важно отметить, что при решении задач память автоматически обогащается различными идеями, связями, приемами, фактами — впоследствии именно такая дополнительная информация будет помогать быстрее справляться с новыми задачами.

Одна из «нелюбимых» поступающими фигур — трапеция, задачи на трапецию традиционно считаются трудными. Наш читатель *В. Варваркин* (Александрия) предлагает напомнить абитуриентам несколько полезных фактов, касающихся трапеции.

Пусть в трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD проведены диагонали, пересекающиеся в точке O. Тогда справедливы следующие утверждения:

— *треугольники AOB и DOC равновелики;*

— *произведение площадей треугольников AOD и BOC равно произведению площадей треугольников AOB и DOC;*

— *отрезок, соединяющий середины оснований BC и AD, проходит через точку O;*

— *точка O является серединой заключенного внутри трапеции отрезка прямой, проходящей через эту точку и параллельной основаниям трапеции.*

Приведем еще одно полезное предложение: *если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, то ее диаметр равен высоте трапеции и является средним геометрическим длин оснований трапеции.* Предлагаем читателям самостоятельно доказать перечисленные свойства трапеции.

Упражнения

1. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная ее основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции, если длины ее оснований равны a и b.

2. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD. Докажите, что

$$S_{ABCD}=(\sqrt{S_{AOD}}+\sqrt{S_{BOC}})^2$$

3. Пусть точки E и F — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$, P — точка пересечения отрезков BF и AE, Q — точка пересечения отрезков ED и CF. Докажите, что прямая PQ параллельна основаниям трапеции.

* * *

Среди присылаемых читателями материалов по-прежнему часто встречаются уравнения и системы уравнений, в решении которых главную роль играют не стандартные преобразования, а специальные логические рассуждения (см. «Квант», 1978, № 4, с. 50; 1979, № 4, с. 50). Вот одна из таких задач — ее предложил *Г. Шишкин* (Глазов):

4. Решить уравнение

$$\sin^{11} x+\cos^{11} x=\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$$

* *
*

«Недавно обратил внимание на предложение присылать в «Квант» короткие и красивые решения задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах, — пишет в своем письме ученик 10 класса *Андрей Сазонов* (Москва). — Об одной интересной задаче я и хочу рассказать».

Пример 1 (КГУ, мехмат, 1979). *Решить уравнение*

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=y^2-4y+5. \qquad (1)$$

Решение этой задачи, опубликованное в «Кванте», 1980, № 6 основано на некоторых оценках левой и правой частей уравнения (1). Между тем быстрее приводит к цели иной путь рассуждений.

Так как левая часть уравнения (1) при $x\neq\pi+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$ равна $\sin x$, данное уравнение можно переписать в виде

$$y^2-4y+(5-\sin x)=0$$

и рассматривать его как квадратное относительно y. Это уравнение имеет корни при тех и только тех значениях x, при которых дискриминант $D=\sin x-1\geqslant 0$. Отсюда следует, что $\sin x=1$. Дальнейшее решение очевидно.

Наш читатель *В. Новицкий* (Львов) справедливо указывает, что в статье И. Мельника («Квант», 1980, № 4) решение задачи на с. 41 страдает неоправданными длиннотами.

Пример 2 (КГУ, 1975). *Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину l. Два плоских угла при вершине пирамиды имеют величину α, а третий — величину β. Найти объем пирамиды.*

Пусть $SABC$ — данная пирамида, в которой $\widehat{ASC}=\widehat{BSC}=\alpha$, $\widehat{ASB}=\beta$; легко показать, что $|AC|=|BC|$. Если использовать «стандартный чертеж» (S — вершина пирамиды, ABC — ее основание), то для решения нужно отдельно рассмотреть три разных случая: $\widehat{ACB}<90°$, $\widehat{ACB}=90°$, $\widehat{ACB}>90°$.

Однако ничто не мешает нам «положить пирамиду на другую грань» — считать вершиной точку C, а ASB — основанием (рис. 1). Так как плоские углы ASC и BSC конгруэнтны, вершина C проектируется в некоторую точку P, лежащую на биссектрисе SM угла ASB (докажите!). Воспользовавшись формулой из § 37 учебника «Геометрия 9—10», можем записать, что

$$\cos\widehat{PSC}=\frac{\cos\widehat{BSC}}{\cos\widehat{BSM}}=\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Для завершения решения остается лишь вычислить длину высоты CP пирамиды (из треугольника PSC) и подсчитать площадь основания ASB (проведите необходимые выкладки).

Опубликованная в «Кванте» (1979, № 11) статья Г. Бевза называлась «Задачи можно решать проще». Ее автор для ряда экзаменационных задач указал простые решения, основанные на геометрических соображениях и почти не требующие вычислений. *Ю. Метт* (Москва) предлагает еще более простые решения нескольких задач, рассмотренных в статье.

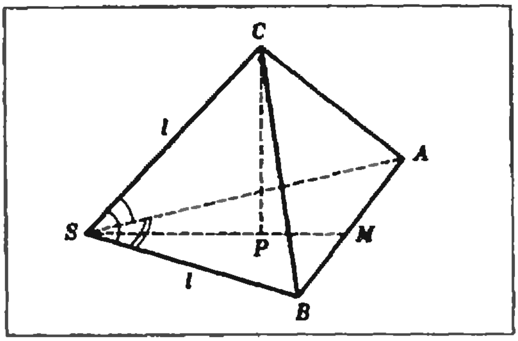


Рис. 1.

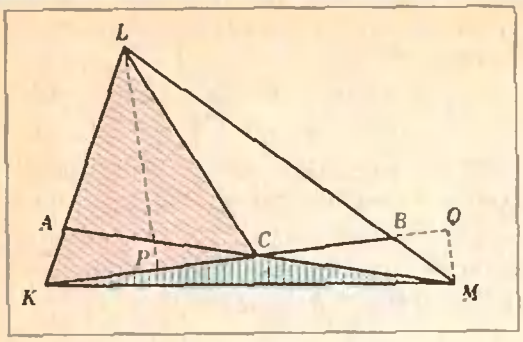


Рис. 2.

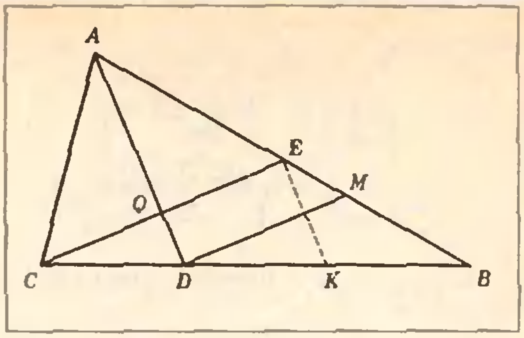


Рис. 3.

Пример 3 (МГУ, экономич. ф-т, 1978). *В треугольнике KLM на стороне KL взята точка A так, что $|KA|:|AL|=1:3$; на стороне LM взята точка B так, что $|LB|:|BM|=4:1$. Пусть C — точка пересечения прямых KB и MA. Известно, что площадь треугольника KLC равна 2. Найти площадь треугольника KLM.*

Эту задачу можно решить, используя только то, что *площади треугольников с одинаковыми основаниями относятся, как их высоты*. Сам по себе сформулированный факт, конечно, хорошо всем известен — основная трудность состоит в том, чтобы увидеть в конкретной конфигурации те треугольники, к которым его удобно и целесообразно применить.

Рассматривая внимательно рисунок 2, можно заметить, что треугольники KCL (его площадь нам известна) и KCM имеют общее основание KC. Поэтому, проведя высоты LP и MQ, запишем

$$S_{KCL}:S_{KCM}=|LP|:|MQ|.$$

Из подобия треугольников LPB и MQB получаем

$$|LP|:|MQ|=|LB|:|MB|=4:1.$$

Таким образом, $S_{KCM}=1/2$. Аналогичные рассуждения (проведите их!) показывают, что $S_{MCL}=3/2$ и, следовательно,

$$S_{KLM}=S_{KCM}+S_{KCM}+S_{MCL}=4.$$

Пример 4 (МФТИ, 1970). *В треугольнике ABC биссектриса AD делит сторону BC в отношении $|BD|:|CD|=2:1$. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?*

Решение задачи получается довольно просто, если провести отрезок EK, параллельный биссектрисе AD (рис. 3). Но еще быстрее к цели приводит построение отрезка DM, параллельного медиане CE. Тогда (читателям предоставляется обосновать эти равенства самостоятельно)

$$\frac{|AQ|}{|QD|}=\frac{|AE|}{|EM|}=\frac{|EB|}{|EM|}=\frac{|EM|+|BM|}{|EM|}=$$
$$=1+\frac{|BM|}{|EM|}=1+\frac{|BD|}{|CD|}=3.$$

Попутно заметим, что в решении нигде не использовано то, что $[AD]$ — биссектриса; решение не изменится, если $[AD]$ — отрезок, соединяющий вершину A с точкой D, делящей сторону BC в заданном отношении.

Пример 5. *Доказать, что если $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ — величины углов треугольника, то*

$$\sin\frac{\widehat{A}}{2}\cdot\sin\frac{\widehat{B}}{2}\cdot\sin\frac{\widehat{C}}{2}\leqslant\frac{1}{8}. \qquad (2)$$

Решение этой задачи, основанное на преобразовании левой части неравенства (2) с помощью тригонометрических формул, можно найти, например, в книге В. Б. Лидского, Л. В. Овсянникова, А. Н. Тулайкова и М. И. Шабунина «Задачи по элементарной математике» (М., «Наука», 1973). Ученик 10 класса *Вячеслав Мельник* (Гайсин) предлагает решение, не требующее громоздких вычислений.

Из теоремы косинусов

$$\cos\widehat{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

(как всегда, маленькие буквы означают длины сторон треугольника, лежащих против соответствующих углов). Тогда (учитывая, что $\sin\frac{\widehat{A}}{2}>0$)

$$\sin\frac{\widehat{A}}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\widehat{A}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}<\frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

Совершенно аналогично убеждаемся, что

$$\sin\frac{B}{2}<\frac{b}{2\sqrt{ac}},\ \sin\frac{\widehat{C}}{2}<\frac{c}{2\sqrt{ab}}.$$

Для доказательства неравенства (2) достаточно почленно перемножить три полученных неравенства.

Попробуйте использовать ту же идею для решения следующей задачи:

5. Докажите, что если $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ — величины углов треугольника, то

$$\cos\widehat{A}+\cos\widehat{B}+\cos\widehat{C}<\frac{3}{2}.$$

* * *

Ученица 9 класса *Гюлари Мехтиева* (Агджабеди) предлагает читателям журнала решить составленную ею задачу. Хотя это — «задача на экстремум», сразу же ясно, что решить ее стандартным путем, с помощью производной, невозможно. Но удачная геометрическая интерпретация выражения, наибольшее значение которого ищется, позволяет легко и красиво получить ответ.

6. Найдите наибольшее значение выражения

$$(A\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^p,$$

где переменные α, β, γ меняются так, что

$$\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0,\ \alpha+\beta+\gamma=\pi;$$

здесь A и p — некоторые положительные числа.

* * *

При решении иррациональных уравнений поступающие обычно не раздумывают над выбором пути и начинают с возведения обеих частей уравнения в степень. Однако этот стандартный способ решения часто приводит к цели лишь после громоздких вычислений.

На одну возможность упростить вычисления указывает в своем письме *В. Ольхов* (Горький). Идея упрощения состоит в том, чтобы один из радикалов принять за новую переменную.

Пример 6. *Решить уравнение*

$$\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5. \qquad (3)$$

Для решения этого уравнения удобно ввести новую переменную $t=\sqrt{x+4}$. Ясно, что $t\geqslant 0$. После указанной подстановки уравнение (3) превращается в уравнение

$$\sqrt{2t^2-14}+t=5,$$

в котором уже только один радикал. Решив последнее уравнение «возведением в квадрат» и проведя проверку получающихся значений переменной, находим единственный корень $x=5$.

Упражнения.

Решите уравнения

7. $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-11}=4$.

8. $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$.

9. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$.

* * *

Следующую задачу прислал в редакцию ученик 10 класса *Илья Зябрев* (Кролевец):

10. С центрами в вершинах квадрата со стороной длины 1 построены четыре окружности радиуса 1 каждая. Найдите площадь фигуры, являющейся общей частью всех четырех кругов.

* * *

Уже не раз отмечалось, что удачное использование векторов оказывается полезным во многих задачах, внешне не имеющих никакого отношения к геометрии. В редакционной почте оказались две такого рода задачи. Первую из них прислал *С. Сефибеков* (село Кашкент Хивского р-на Дагестанской АССР), вторую предлагает ученик 10 класса *Илгар Гасанов* (Сумгаит). Конечно, обе эти задачи можно решить и без привлечения векторов (попробуйте найти такие решения), но, бесспорно, «векторные» решения более красивы.

11. Найдите множество значений функции

$$f(x)=\frac{a\cos x+b\sin x+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

где a, b, c — не равные нулю числа.

12. Докажите, что для любых a, b, x, y справедливо неравенство

$$a\cdot 2^x+b\cdot 3^y+1<\sqrt{4^x+9^y+1}\cdot\sqrt{a^2+b^2+1}.$$

* * *

Геометрические задачи на экстремум стали для абитуриентов уже привычными. Показательной в этом отношении является задача, которую предложил *Э. Готман* (Арзамас).

Пример 7. *Фиксирован треугольник ABC, в котором*

$$|AC|=b,\ |AB|=c,\ \widehat{BAC}=\alpha,$$

причем $\alpha<\pi/2$. В плоскости этого треугольника рассматриваются всевозможные прямоугольники $ALMN$ такие, что вершина B треугольника лежит на стороне LM прямоугольника, а вершина C треугольника — на стороне MN прямоугольника. Каково наибольшее значение площади прямоугольника, обладающего указанным свойством?

Из рисунка 4, где изображены «описанные» около треугольника ABC прямоугольники, видно что в качестве параметра, характеризующего выбор прямоугольника, можно взять величину угла x между стороной AL прямоугольника и стороной AB треугольника. Тогда очевидно, что площадь прямоугольника $ALMN$ $S=|AL|\cdot|AN|=$

$$=c\cos x\cdot b\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\alpha\right)=$$

$$=bc\cos x\sin(x+\alpha).$$

Однако нужно еще указать, исходя из геометрического смысла задачи, область определения функции $S=S(x)$. Для краткости положим $\widehat{ABC}=\beta$, $\widehat{ACB}=\gamma$.

Пусть $ALMN$ — некоторый «описанный» прямоугольник; тогда нетрудно проверить (убедитесь в этом), что имеют место следующие соотношения:

$$x\geqslant\begin{cases}0, & \text{если } \beta<\pi/2,\\ \beta-\pi/2, & \text{если } \beta\geqslant\pi/2,\end{cases}\qquad(4)$$

$$x+\alpha\leqslant\begin{cases}\pi/2, & \text{если } \gamma<\pi/2,\\ \pi-\gamma, & \text{если } \gamma\geqslant\pi/2,\end{cases}\qquad(5)$$

$$x\leqslant\beta,\quad \pi/2-(x+\alpha)\leqslant\gamma.\qquad(6)$$

Весьма существенно, что справедливо и обратное утверждение: если x удовлетворяет одновременно всем неравенствам (4) — (6), то прямоугольник, соответствующий этому значению угла x, обладает указанным в условии задачи свойством.

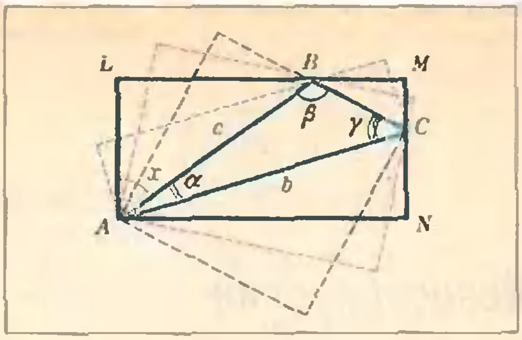


Рис. 4.

Теперь можно закончить решение задачи. Допустим для определенности, что в данном треугольнике угол ABC — острый (то есть $\beta<\pi/2$; другие возможности предоставляется рассмотреть читателям). В таком случае задача, очевидно, сводится к отысканию наибольшего значения функции

$$S=bc\cos x\sin(x+\alpha)$$

$$\text{при } 0\leqslant x\leqslant\min(\beta,\ \pi/2-\alpha).\qquad(7)$$

Так как (проверьте!) $S'(x)=bs\cos(2x+\alpha)$, уравнение $S'(x)=0$ имеет корень $x_0=\pi/4-\alpha/2$ (остальные корни нас интересовать не могут). Специфический вид области определения функции (7) приводит к следующему окончательному результату:

если $\alpha+2\beta>\pi/2$, то x_0 является критической точкой функции (7), причем она достигает там наибольшего значения:

$$S_{\max}=bc\cos^2(\pi/4-\alpha/2)=$$

$$=\frac{1}{2}bc(1+\sin\alpha);$$

— если $\alpha+2\beta\leqslant\pi/2$, то функция (7) критических точек не имеет и является возрастающей, принимая при $x=\beta$ наибольшее значение:

$$S_{\max}=bc\cos\beta\sin(\alpha+\beta)=$$

$$=\frac{1}{2}c^2\sin 2\beta.$$

* * *

В заключение приведем неравенство, присланное в редакцию *С. Майзусом* (Запорожье).

13. Докажите, что при $0<x<\pi/2$

$$\sin x+\operatorname{tg}x>2x.$$

Новосибирский государственный университет

им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

На выполнение работы было предоставлено 5 часов.

Вариант 1

(механико-математический, физический и экономический факультеты)

1. Решить уравнение

$$\cos\left(\frac{4+\sqrt{5}}{2}\sin x+2\cos x\right)=$$
$$=\sin\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-2\right)\sin x\right).$$

2. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса R. Точка D лежит на дуге BC, а хорды AD и BC пересекаются в точке M. Найти длину стороны BC, если $\widehat{BMD}=120°$, $|AB|=R$, $|BM|:|MC|=2:3$.

3. При каких значениях параметра a найдутся значения x такие, что числа $5^{1+x}+5^{1-x}$, $\frac{a}{2}$, 25^x+25^{-x} составляют арифметическую прогрессию?

4. $SABC$ — правильный единичный тетраэдр. Сфера касается ребер AS, AC, AB и проходит через середину ребра BC. Найти радиус сферы, если известно, что ее центр лежит внутри тетраэдра.

5. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений

$$\begin{cases} bx+y=ac^2, \\ x+by=ac+1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Вариант 2

(геолого-геофизический факультет и факультет естественных наук)

1. Решить уравнение

$$\cos^2 x(1-\sin x)=1+\sin^3 x.$$

2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, диагональ AC которого равна $\sqrt{2}$. Найти площадь круга, описанного около треугольника ABD, если известно, что $\widehat{ABC}=105°$, $\widehat{ACD}=42°$, $\widehat{DAC}=63°$.

3. Найти неотрицательные значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\log_6 2(1+2^{-x})-\frac{x}{1-\log_{\frac{1}{2}}3}=\log_6 a.$$

4. Сфера касается бокового ребра AA' и непараллельных ребер оснований AB и $A'D'$ единичного куба $ABCDA'B'C'D'$ и проходит через точку M, лежащую на боковом ребре CC', $|CM|=\frac{1}{3}$. Найти радиус сферы.

5. Пусть x пробегает множество решений неравенства

$$x^4-4x^2+3<0.$$

Каково при этом максимальное значение выражения

$$1+ax-x^2?$$

Нарисовать график зависимости этого максимального значения от параметра a.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из пяти задач трех типов. На решение задач давалось пять часов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, придумать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи физические величины и их численные значения. Опыт вступительных экзаменов в НГУ показывает, что с задачами-оценками справляется значительная часть абитуриентов, зачисляемых на физический факультет.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных физических факторов выделить главный.

Вариант 1

1. В воду при температуре $t_0=90°C$ бросают равное воде по массе количество раскаленных платиновых опилок. Найдите начальную температуру опилок, если известно, что после прекращения кипения уровень воды остался первоначальным. Плотность платины $\varrho_{пл}=21{,}4\cdot10^3$ кг/м^3, удельная теплоемкость платины $c_{пл}=128$ Дж/(кг·К),

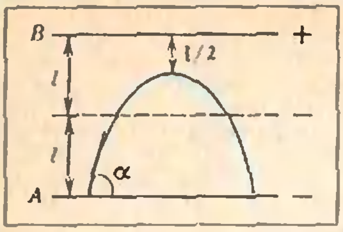


Рис. 1.

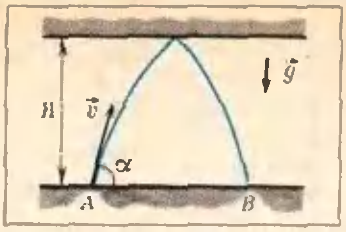


Рис. 3.

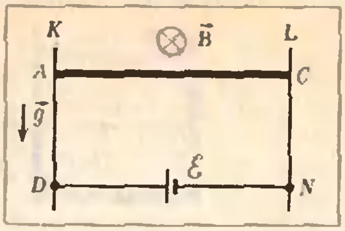


Рис. 5.

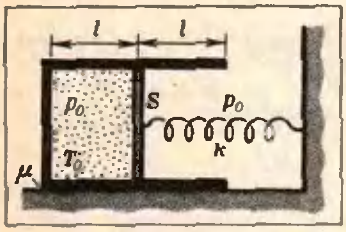


Рис. 2.

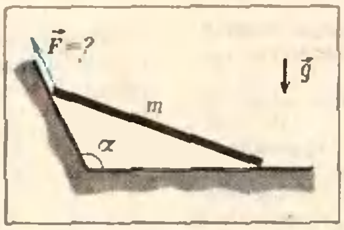


Рис. 4.

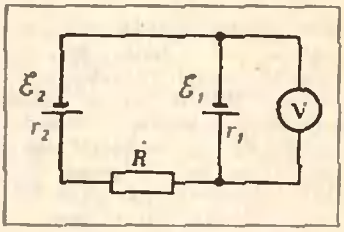


Рис. 6.

удельная теплоемкость воды $c_в = 4190$ Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды $\lambda = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг. Изменением плотности при нагревании пренебречь.

2. Посередине плоского конденсатора, расстояние между пластинами которого $2l$, находится заряженная сетка (рис. 1). Разность потенциалов между положительно заряженной пластиной B и сеткой вдвое больше разности потенциалов между сеткой и отрицательно заряженной пластиной A. Из пластины A под углом α к ее плоскости вылетает положительно заряженная частица и достигает точки, расположенной на расстоянии $l/2$ от пластины B. Определите, на каком расстоянии от точки вылета частица попадает на пластину A. Силу тяжести не учитывать.

3. Цилиндрическая камера (рис. 2) длиной $2l$ с поршнем сечением площади S (общая масса M) может двигаться по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения μ. Слева от поршня, расположенного в центре камеры, находится газ при температуре T_0 и давлении p_0. Между неподвижной стенкой и поршнем помещена пружина жесткости k. Во сколько раз нужно увеличить температуру газа слева от поршня, чтобы его объем удвоился, если между камерой и поршнем трения нет? Наружное давление p_0.

4. Оцените максимальный радиус полости, образующейся при подводном взрыве на глубине $h = 1$ км заряда взрывчатого вещества массой $m = 1$ т. Энергия взрыва 1 грамма взрывчатого вещества равна примерно $\lambda = 4$ кДж.

5. Характер отскоков подвешенного на нити упругого костяного шарика после удара о круглое препятствие при перемещениях последнего по горизонтали изменяется. При некотором положении препятствия отскок сильный; при приближении к шарику или удалении от него препятствия амплитуда отскока резко уменьшается. Объясните явление.

Вариант 2

1. Какое расстояние $|AB|$ (рис. 3) пролетит мячик, брошенный под углом α к горизонтальной плоскости со скоростью $\vec v$, если он ударился о потолок? Высота потолка H, удар упругий, трения нет.

2. Однородный стержень массой m одним концом опирается на горизонтальную, другим — на наклонную плоскости (рис. 4). Угол между плоскостями равен α. Какую силу $\vec F$, направленную вдоль наклонной плоскости, надо приложить к стержню, чтобы он находился в равновесии? Трения нет.

3. Вертикальные рельсы KD и LN, скользящий по ним стержень AC и батарея с ЭДС $\mathscr{E}$ составляют электрическую цепь (рис. 5). Перпендикулярно плоскости $KDNL$ приложено постоянное магнитное поле индукции $\vec B$. Длина стержня AC равна l, его сопротивление R и масса m. Найдите установившуюся скорость, с которой поднимается стержень. Сопротивлением рельсов, батареи, а также трением пренебречь.

4. Гимнаст делает на перекладине оборот «солнышко». Оцените, с какой силой он действует на перекладину в момент, когда проходит через нижнее положение.

5. Объясните, почему легко вытаскивается гвоздь, если его согнуть и тащить, одновременно поворачивая вокруг оси.

Вариант 3

1. В схеме, изображенной на рисунке 6, включены два элемента с ЭДС $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ ($\mathscr{E}_2 > \mathscr{E}_1$) и внутренними сопротивлениями r_1 и r_2. Сопротивление нагрузки R. Какое напряжение покажет вольтметр?

2. При колебаниях двух одинаково заряженных шариков (заряд каждого q) расстояние между ними меняется от l до $4l$. Шарики соединены пружиной, длина которой в свободном состоянии $2l$. Определите жесткость пружины.

3. В вертикально стоящем цилиндрическом сосуде сечением S под поршнем массой m находится газ. Сосуд разделен перегородкой на две одинаковые части высотой l каждая (рис. 7). Давление в нижней части p, внешнее давление p_0, температура газа в обеих частях сосуда T. На сколько сместится поршень, если убрать

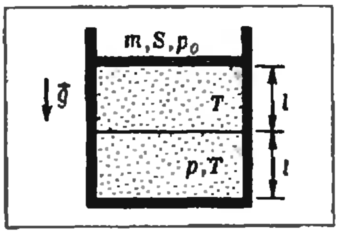


Рис. 7.

перегородку? Внутренняя энергия одного моля газа $U = CT$. Стенки сосуда и поршень не проводят тепла, трения нет.

4. Оцените время вытекания воды из заполненной ванны.

5. Между заземленным и заряженным металлическими шарами на изолированной нити висит металлический шарик. Объясните его поведение при перемещении заряженного шарика.

Решение задач варианта I

1. Из закона сохранения энергии (уравнения теплового баланса), с учетом равенства объемов платиновых опилок и испарившейся воды, имеем

$$t_к = t_к + \frac{c_в}{c_{пл}}(t_к - t_0) + \frac{\rho_в}{\rho_{пл}}\,\frac{\lambda}{c_{пл}} \approx 1250°C$$

(здесь $t_к = 100°C$ — температура кипения воды).

Некоторые абитуриенты не смогли решить эту задачу, так как не поняли, что условие сохранения уровня воды означает равенство объемов платиновых опилок и испарившейся воды.

2. Пусть модуль ускорения и время движения частиц между пластиной A и сеткой C равны a_1 и t_1, между сеткой и пластиной B — соответственно a_2 и t_2, а потенциалы таковы: $\varphi_A = 0$, $\varphi_C = \varphi$ и $\varphi_B = 3\varphi$. При этом

$$a_2 = 2a_1 = \frac{e}{m}\,\frac{2\varphi}{l}.$$

Спускаясь из высшей точки траектории до сетки, частица перемещается по вертикали на

$$\frac{l}{2} = a_2\frac{t_2^2}{2}.$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2} + 2e\varphi,$$

где v_0 — начальная скорость частицы. Кроме того, условие равенства нулю вертикальной проекции скорости в высшей точке дает

$$v_0\sin\alpha - a_1t_1 - a_2t_2 = 0.$$

Из полученных уравнений найдем искомое расстояние:

$$L = v_0\cos\alpha \cdot 2(t_1 + t_2) = 2(4 - \sqrt{2})\,l\operatorname{ctg}\alpha.$$

Большинство решавших эту задвчу рассматривали движение частицы не от верхней точки траектории, а от пластины A. Это, с одной стороны, приводило к громоздким выкладкам, а с другой стороны, увеличивало вероятность допустить ошибку. Так, многие забывали, что движение частицы от сетки к пластине B происходит с некоторой начальной скоростью.

3. Здесь надо рассмотреть два случая: а) $\mu Mg > kl$ и б) $\mu Mg < kl$.

В случае а) камера покоится. Из условия равновесия поршня $(p - p_0)S = kl$ и из уравнения Клапейрона для газа $\frac{pS2l}{T_а} = \frac{p_0Sl}{T_0}$ найдем искомое отношение:

$$\frac{T_а}{T_0} = 2\left(1 + \frac{kl}{p_0S}\right) \text{ при } \mu Mg > kl.$$

В случае б) камера покоится только до достижения максимального значения силы трения покоя. К этому моменту пружина сожмется на $x = \mu Mg/k$, а температура газа станет равной

$$T_1 = T_0\left(1 + \frac{\mu Mg}{p_0S}\right)\left(1 + \frac{\mu Mg}{kl}\right).$$

После начала проскальзывании камеры увеличение объема газа будет происходить при постоянном давлении; следовательно,

$$\frac{T_б}{T_1} = \frac{V}{V_1} = \frac{2lS}{(l+x)S} = \frac{2}{1 + \mu Mg/(kl)}.$$

Подставляя сюда значение T_1, получим

$$\frac{T_б}{T_0} = 2\left(1 + \frac{\mu Mg}{p_0S}\right) \text{при } \mu Mg < kl.$$

Наиболее грубой и частой ошибкой при решении этой задачи было отсутствие рассмотрения явления застоя, когда камера сначала покоится. Удивительно также, что очень многие не учитывали внешнее давление p_0.

4. Выделившаяся при взрыве тепловая энергия идет в основном на работу против сил гидростатического давления:

$$Q = p(V_{кон} - V_{нач}) \approx pV_{кон},$$

или

$$m\lambda \approx \rho_в gh\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Отсюда

$$r \sim \sqrt[3]{\frac{3m\lambda}{4\pi\rho gh}} \sim 5 \text{ м}.$$

В оценке объема полости некоторые абитуриенты пропустили главный фактор — работу против внешнего давления при расширении пузыря, ошибочно полагая, что почти вся энергия идет на образование пара в пузыре.

5. Максимальный отскок получается в случае, если проекция переданного шарику импульса на направление вдоль нити минимальна. (Если в момент удара линия центров перпендикулярна к нити, проекция на направление вдоль нити равна нулю и отскок максимален из всех возможных.) При перемещении круглого препятствия проекция импульса вдоль нити увеличивается, а, значит, доля энергии, идущей на движение шарика, уменьшается.

Некоторые абитуриенты безуспешно пытались свести все к различию в кинематике центрального и нецентрального ударов.

Г. Меледин,
М. Фокин

Ю. Первин

Трехадресные, одноадресные и... безадресные машины

Когда читатели «Кванта» знакомились с работой управляющего устройства*) вычислительной машины, рассматривались ЭВМ с таким форматом команды, как на рисунке 1. Адресная часть команды на этом рисунке разделена на три поля с адресами *операндов* (величин, участвующих в операции).

Код операции	1-е адресное поле	2-е адресное поле	3-е адресное поле

Адресная часть команды

Рис. 1.

В первом адресном поле находится адрес первого операнда выполняемой операции, во втором — адрес второго операнда. Третье адресное поле — это адрес результата. Все три адреса имеют одинаковую длину. Такой формат команд имела не дожившая до наших дней трехадресная машина БЭСМ-2. Например, команда

01 0257 1023 0016

в БЭСМ-2 означала сложение (код операции — 01) величины, хранящейся в машинном слове по адресу 0257, с величиной, находящейся в машинном слове по адресу 1023, и размещение результата в машинном слове с адресом 0016.

Когда в адресном поле команды записывается адрес машинного слова, находящегося в памяти (как в случае БЭСМ-2), длина адресного поля определяется объемом оперативной памяти. Например, для того чтобы $4K = 2^{12} = 4096$*) машинных слов из оперативной памяти могли иметь различающиеся адреса, длина одного адреса должна составлять не менее 12 двоичных разрядов.

Иной вид имеет команда одноадресной машины (рис. 2).

Код операции	Адресное поле

Рис. 2.

В адресном поле такой команды можно указать только один адрес. А как же в таком случае задать адрес второго операнда? А куда послать результат? Чтобы ответить на эти вопросы, надо знать, что в одноадресной машине есть особый регистр, равный по длине машинному слову. Этот регистр называется *сумматором*. Он принимает участие в выполнении практически каждой команды машины. Например, в кодах еще одного «дедушки» современных ЭВМ — одноадресной машины «Урал-2» — сложение двух чисел, хранящихся в памяти по адресам 0257 и 1023 с засылкой результата по адресу 0016 выполнялось такими тремя командами:

02 0257	(посылка в сумматор числа из машинного слова с адресом 0257)
01 1023	(сложение содержимого сумматора с числом, хранящимся в машинном слове по адресу 1023; результат получается в сумматоре)
16 0016	(пересылка числа из сумматора в машинное слово по адресу 0016)

Не следует думать, что программа одной и той же задачи в одноадресной машине всегда втрое длиннее, чем в трехадресной. В большинстве

---

*) «Квант», 1980, № 5, с. 56.

*) Здесь *K* обозначает не килобайт, равный 1024 байтам, а просто число $1024 = 2^{10}$.

практических случаев (особенно когда результат операции непосредственно используется в следующей операции) удлинение программы оказывается небольшим.

Вот пример. В кодах трехадресной машины программа, вычисляющая выражение a^2+a-1, записывается так:

03 A A B (умножение $a \cdot a$)
01 A B B (сложение a^2+a)
02 B C B (вычитание $(a^2+a)-1$)

где A — это адрес числа a, по адресу C хранится единица, B — адрес машинного слова, используемого в качестве промежуточного. В одноадресной машине та же программа выглядит так:

02 A (посылка числа a в сумматор)
06 A (умножение $a \cdot a$; результат в сумматоре)
01 A (сложение a^2+a; результат в сумматоре)
03 C (вычитание a^2+a-1; результат в сумматоре).

Итак, программа увеличилась всего на одну команду (обратили ли вы внимание на то, что в последней программе не понадобились промежуточные машинные слова?). А вот экономия оборудования в одноадресной машине значительная: ведь адресная часть каждой команды становится втрое короче.

Вряд ли после этого читатель найдет удивительной двухадресную машину (такими были машины «Минск»). Зато полутораадресная машина может показаться на первый вхгляд необычной. Но представьте себе, что ЭВМ располагает двумя типами оперативной памяти: одна — обычная, большая, в которой для обозначения места машинного слова нужен «длинный» адрес; другая — сверхбыстродействующая, обладающая небольшим числом регистров, для однозначного указания которых достаточно совсем «короткого» адреса. Это и есть полутораадресная ЭВМ.

Впрочем, в более поздних машинах регистры, используемые для определения адреса операнда, нашли и другое применение. В большинстве машин адрес, участвующий в команде непосредственно в момент выполнения (так называемый *исполнительный* адрес), не совпадает со значением адресного поля, а вычисляется как значение некоторой функции. Такая функция чаще всего выглядит как сумма записанного в адресном поле значения (так называемого *смещения*) и содержимого одного регистра (*базы*), указанного в команде, или двух регистров (*базы* и *индекса*). Например, в машине БЭСМ-6 (если отвлечься от некоторых непринципиальных подробностей) формат большинства команд имеет вид, показанный на рисунке 3.

Регистр базы	*Код операции*	*Адресное поле (смещение)*
4	*8*	*12*

Рис. 3.

Числа в полях команды на рисунке 3 указывают длину соответствующего поля, измеренную в количестве двоичных разрядов. Оперативная память БЭСМ-6 содержит $32К=2^{15}$ машинных слов, а наибольшее число, записываемое в адресном поле, во всяком случае меньше чем 2^{13}. И вот тут приходит на помощь один из шестнадцати ($2^4=16$) регистров базы, именно тот, номер (адрес) которого указан в поле регистра базы. Исполнительным адресом команды является сумма пятнадцатиразрядного значения, хранящегося в указанном регистре базы, и двенадцатиразрядной величины смещения. Например, команда

03 004 0231

при условии, что в третьем регистре содержится число 12000, будет складывать (004 — код операции сложения) содержимое сумматора с числом, хранящимся по адресу $12000+$ $+231=12231$, и отправлять результат в сумматор. Здесь 3 — адрес (номер) регистра базы, 12000 — база, 231 — смещение, 12231 — исполнительный адрес. Таким образом, база означает начальный адрес некоторой области оперативной памяти, а адрес нужного слова в этой области получается добавлением смещения к базе. Этот способ адресации называется *относительным*. Он удобен тем, что дает возможность перемещать программы или части программ по всей оперативной памяти, так что программист освобождается от необходимости следить за размещением программы.

Еще большее развитие способ относительной адресации получил в машинах серии ЕС ЭВМ. Память этих машин составляется из обширной оперативной памяти и сравнительно небольшого набора (16) регистров общего назначения, а в адресной части команды записывается чаще всего два адресных поля. Поэтому в этих машинах существуют не один, а три формата команд. Первый из них — *«регистр — регистр»* (рис. 4) — описывает команды, которые оперируют с числами, хранящимися в регистрах Р1 и Р2, и записывают результат по адресу Р1. Второй формат — *«регистр — память»* (рис. 5). Здесь адрес одного из операндов (второго) задается в памяти. Исполнительный адрес получается сложением смещения СМ2 со значениями, хранящимися в регистре базы Б2 и регистре индекса И2. Наконец, в командах формата *«память — память»* (рис. 6) оба операнда расположены в основной памяти. Для каждого из них исполнительный адрес получается сложением смещения со значением регистра базы. Кроме того (в этом особенность машин серии ЕС), в этом формате указываются длины Д1 и Д2 полей операндов, что дает возможность работать не только с машинными словами единого размера, но и с данными произвольной длины.

Рис. 4.

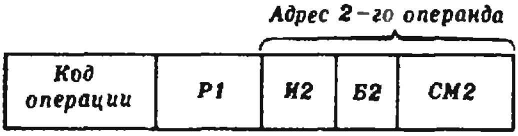


Рис. 5.

Вернемся еще раз к системам адресации, проиллюстрированным рисунками. Трехадресная машина (рис. 1) характерна тем, что все машинные слова в ее памяти совершенно равнозначны с точки зрения организации и времени доступа. Машины, обладающие таким свойством, называются *линейными* или, точнее, машинами с *линейной структурой памяти*. Уже в обычной одноадресной машине (рис. 2) линейность слегка нарушена: существует один особый регистр — сумматор — который может хранить информацию подобно другим машинным словам памяти, но весьма отличается от них. В частности, это — единственный регистр, куда результат операции может направляться без предварительных пересылок. В машинах с регистрами базы (рис. 3) линейность нарушается неравноправием между 16 регистрами и 32К словами оперативной памяти. Еще более заметна «нелинейность» в машинах серии ЕС (рис. 4, 5, 6), где такая неравноправность определяется не только наличием базы и индекса в формате команды, но также и возможностью работы со словами различной длины. Вместе с тем все эти машины в принципе сохраняют линейную структуру основной части оперативной памяти.

А вот в машинах со *стековой структурой памяти* принципу линейности нанесен уже серьезный удар.

Понять, что такое стек, легче всего, представив себе стопку книг на вашем письменном столе

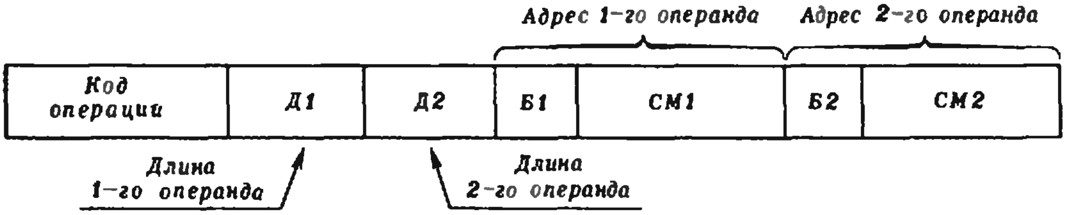


Рис. 6.

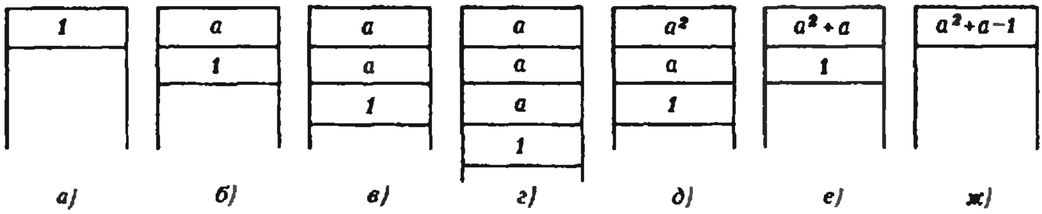


Рис. 7.

(по английски «stack» как раз означает «стопка»). Добавлять книги в эту стопку можно, лишь положив последнюю заинтересовавшую вас книгу на самый верх стопки. Эта же книга, положенная последней, оказывается и самой первой из доступных книг. Даже если вам нужна какая-то книга в середине стопки, то первой книгой, которую придется брать в ходе этого поиска, будет последняя книга, положенная на верх стопки. *Стек* — это такая группа машинных слов, в которой в каждый момент доступно только одно слово, а именно то, которое было записано последним. Это доступное слово в стеке называется *верхушкой* стека, а остальная часть стека — его *телом*. Добавление слова в стек означает создание новой верхушки, предыдущая верхушка становится вторым элементом стека, частью тела. Взятие слова из стека делает верхушкой стека элемент, который до выполнения этой операции непосредственно следовал в стеке за верхушкой.

Если память ЭВМ организована в виде стека, то для выполнения многих операций можно не указывать адреса операндов, если они предварительно помещены в верхушке стека или непосредственно следом за ней. Так, команда СЛ, задаваемая только кодом операции (и ничем более!), складывает два числа, одно из которых находится в верхушке стека, а другое непосредственно вслед за ним, и помещает результат в верхушку стека. Как видите, в команде нет совсем адресной части. Машины со стековой структурой памяти поэтому называют часто безадресными. Такой термин не означает, конечно, что машинные слова в стековой памяти не имеют адресов. Адреса существуют, но после того, как операнды посланы в стек, нет необходимости указывать эти адреса в адресной части большинства машинных команд.

Вот как выглядит, например, программа, вычисляющая упоминавшееся уже выражение a^2+a-1 в машине «Эльбрус» — самой быстродействующей советской стековой машине четвертого поколения (А — информация об адресе величины a):

ЗГЦ1 (загрузка в верхушку стека целого числа 1 — рис. 7, а)
СЧВЕЛ А (помещение величины, расположенной по адресу А, в верхушку стека; прежняя верхушка погружается при этом в тело стека — рис. 7, б)
РАЗДВ («раздвоение» верхушки: экземпляр величины, хранившейся в верхушке стека, записан теперь и в слово, непосредственно следующее за верхушкой; остальная часть стека опустилась при этом еще глубже — рис. 7, в)
РАЗДВ (еще одно «раздвоение»: дело в том, что в дальнейших операциях потребуется три экземпляра величины a — рис. 7, г)
УМН (перемножение чисел, расположенных в двух самых верхних словах стека; результат a^2 остается в верхушке стека, а использованные операнды убираются из стека — рис. 7, д)
СЛ (сложение чисел, расположенных в двух верхних словах стека; результат a^2+a остается в верхушке стека — рис. 7, е)
ВЫЧ (вычитание: из верхушки стека — суммы a^2+a — вычитается 1, расположенная в стеке сразу под верхушкой; результат остается в верхушке стека — рис. 7, ж)

Команды этой программы записаны в несколько упрощенном виде и не дают полного представления об очень богатой и гибкой системе команд «Эльбрус». Рассказу об этой машине будет посвящена отдельная статья в одном из следующих номеров «Кванта».

VII Всероссийский слет юных рационализаторов и конструкторов

С 3 по 10 августа 1980 года в Краснодаре проходил VII Всероссийский слёт юных техников, посвященный 110-й годовщине со дня рождения В. И. Ленина.

Место проведения слета было выбрано не случайно: именно в Краснодарском крае в 1963 году появились первые школьные организации Всесоюзного общества изобретателей и рационализаторов (ВОИР). Сейчас в стране насчитывается свыше ста тысяч членов этого общества.

На очередном слете присутствовали 285 участников; среди них 2 автора изобретений, 23 участника ВДНХ, 54 лауреата Всесоюзного смотра научно-технического творчества молодежи, 134 автора рационализаторских предложений, 218 победителей областных и краевых смотров, выставок, конкурсов.

Бурными аплодисментами встретили ребята сообщение о том, что в адрес слета получена приветственная телеграмма от дважды Героя Советского Союза летчика-космонавта СССР В. В. Горбатко. Участники слета направили ответную телеграмму на орбиту космонавтам В. В. Горбатко и Фам Туану.

Все дни на слете работала выставка, на которой было представлено 350 экспонатов.

Вводный зал выставки был посвящен моделям и макетам, связанным с жизнью и деятельностью В. И. Ленина. Большой интерес вызвала модель парохода «Боре», на котором В. И. Ленин после перехода по льду Финского залива отплыл в Швецию. О существовании этого парохода рассказали финские туристы, посетившие Ленинградский дворец пионеров; они же прислали фотографии этого парохода и документы о нем. Модель парохода изготовил ученик школы № 163 г. Ленинграда Александр Рождественский.

Экспозицию выставки составили 4 раздела: 1) юные техники — школе; 2) юные рационализаторы и конструкторы — промышленности; 3) юные рационализаторы и конструкторы — сельскому и лесному хозяйствам; 4) юные рационализаторы и конструкторы — строительству и транспорту.

Жюри рассмотрело все экспонаты выставки; 62 лучших экспоната были отобраны на ВДНХ; 146 работ были допущены к защите на заседаниях секций. Жюри оценивало не только техническое решение и оформление представленных работ, но и актуальность и целесообразность их, а также умение авторов излагать и обосновывать свои идеи. Предпочтение оказывалось работам, внедренным в практику или имеющим свидетельство на изобретение или рационализаторское предложение. Расскажем о некоторых работах.

Государственный комитет СССР по делам изобретений и открытий выдал свидетельство на изобретение группе учащихся Омской областной станции юных техников. Они создали установку для раздачи кормов, которая позволяет автоматически, по заранее установленной программе накормить 1200 коров в течение полутора-двух часов. Установка проста в изготовлении и обслуживании и обещает значительный экономический эффект.

Второе авторское свидетельство на изобретение получил ученик школы № 239 г. Ленинграда Леонид Жуковский. Его устройство позволяет уменьшить волны, образующиеся в плавательном бассейне и мешающие устанавливать высокие результаты. Габариты и стоимость бассейна при этом не увеличиваются.

Оба изобретения уже внедряются в практику.

Отрадно отметить, что сотни предложений, сделанных школьниками, используются в школах, в промышленности и сельском хозяйстве.

Так, в учебно-производственном комбинате (УПК) № 1 г. Свердловска не только разработали универсальный верстак новой конструкции, но и изготовили 60 таких верста-

Светлана Каирова (Грозный, с. ш. № 3) рассказывает о своей работе.

ков для школ города. Серийный выпуск комплекта приборов для изучения электроники налажен в школе Невинномысского района Ставропольского края. Приборы для определения способности перенесения внимания, сконструированные в областной станции юных техников Свердловской области, нашли применение в медицинских учреждениях г. Свердловска. Универсальный медицинский комплекс для диагностики и лечения ряда заболеваний, сконструированный радиотехническим кружком городской станции юных техников г. Благовещенска Амурской области, одобрен медицинским институтом и используется практически. Портативный цифровой анемометр, созданный кружком электроники станции юных техников Иркутского научного центра, используется для метеорологических исследований в школах города. Малогабаритная сельскохозяйственная техника, изготовленная в Алтайском, Краснодарском, Ставропольском краях, Московской, Псковской, Липецкой, Белгородской и Горьковской областях, успешно применяется на пришкольных учебно-опытных участках.

По итогам слета различными почетными грамотами, дипломами и памятными подарками награждены многие участники. Отмечены также лучшие коллективы, кружки, станции юных техников, дворцы пионеров, организации ВОИР.

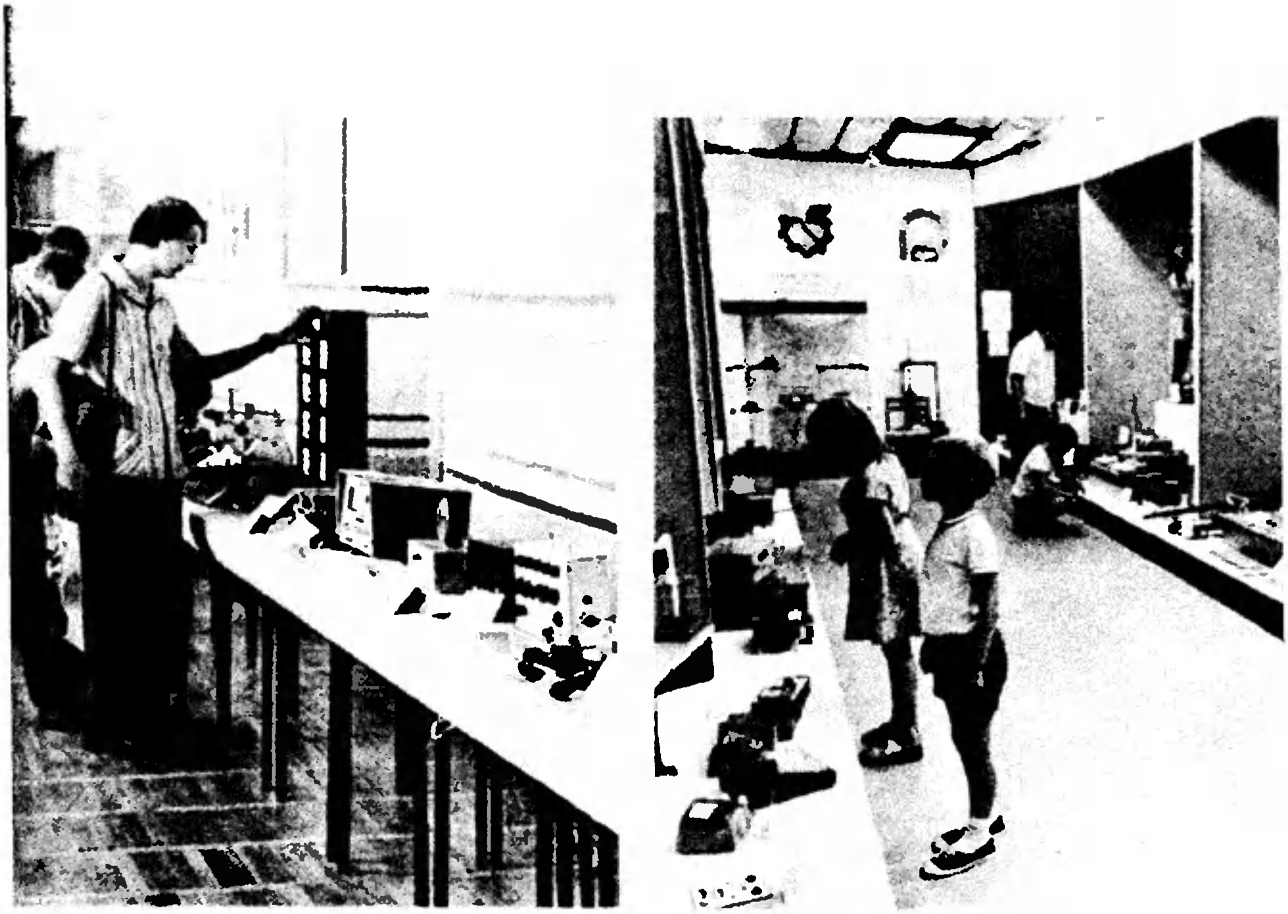
Уровень защиты своих работ участниками слета был в целом высок. Высока была и активность оппонентов. Отметим наиболее яркие выступления участников слета:

Светлана Каирова, ученица школы № 3 г. Грозного, защищала комплект оригинальных приборов для выполнения физического практикума; Лариса Косякова, ученица Никольской восьмилетней школы Ростовской области, демонстрировала учебно-наглядное пособие по химии; Анатолий Терентьев, ученик школы № 77 г. Свердловска, защищал универсальный верстак для школьных мастерских, а Александр Квархава, ученик школы № 75 Лазаревского района Краснодарского края, — универсальный станок по обработке дерева; Алла Иванова, ученица Медновской санаторной школы-интерната, рассказала об использовании природных материалов при оформлении школы и пришкольного участка; Алексей Китченко, ученик школы № 156 г. Новосибирска, защищал макет кабинета географии, оборудованного в школе; Павел и Петр Зубко, ученики школы № 14 г. Рязани, защищали изобретенный ими тренажер; Игорь Чекин, ученик школы № 28 г. Петрозаводска, рассказал об оригинальной конструкции электронных часов со звуковой сигнализацией; Алексей Колмогоров, ученик школы № 9 г. Свердловска, защищал прибор для определения способности переноса внимания; Олег Кос, ученик школы № 95 г. Новосибирска,— комплект радиотехнических приборов для работы в кружке; Андрей Челноков, ученик Мокинской средней школы Курганской области,— универсальный сверлильный станок «Сверчок», позволяющий выполнять сверлильные, граверные и полировочные работы; Арсен Аветисьян, ученик школы № 25 г. Пятигорска,— зуборезный станок для изготовления шестеренок, применяемых для моделей и объектов в техническом творчестве; Татьяна Иващенко, ученица Ольгинской средней школы № 2 Ростовской области, рассказала о разработке штампов и технологии для изготовления букв из фольги (с помощью созданного приспособления оформлены все школьные стенды и выполняются заказы различных предприятий); Валерий Медведев, ученик школы № 22 г. Свердловска, защищал прибор для обнаружения неисправностей в телевизоре (прибор одобрен управлением бытового обслуживания Свердловского облисполкома); Сергей Обухов, ученик школы № 1 г. Воркуты,— приспособление для снятия наружной обоймы подшипника; Адам Ловпаче, ученик Энемской средней школы Краснодарского края,— сенокосилку для скашивания сена в неудобных местах; Сергей Кузнецов, ученик школы № 12 г. Краснодара,— «Плодоробот-80», который может работать в садоводстве, овощеводстве, виноградарстве, кормопроизводстве; Алексей Северегин, ученик школы № 13 г. Костромы,— действующую модель светофора, облегчающего переход улицы слепым (эта работа отмечена специальным призом «За гуманизм»).

Участникам слета была предложена большая культурно-воспитательная программа. Торжественно прошла церемония возложения цветов к памятнику В. И. Ленину. Участники слета посетили легендарную Малую землю, город-герой Новороссийск, некоторые промышленные предприятия Краснодара. Увлекательно прошел конкурс фантастических проектов.

По результатам анкеты, проведенной сотрудниками Академии педагогических наук СССР, был составлен обобщенный автопортрет участника VII Всероссийского слета юных

Участники слета со своими установками.



В залах выставки, работавшей во время слета.

рационализаторов и конструкторов. Вот его основные черты:

В свободное от учебы время юный техник занимается работой в кружках (96%), большей частью с увлечением (85%); кроме того, часто самостоятельно работает над поделками дома (51%). Предпочитает работу с техническими объектами (98%), связывает свои занятия в технических кружках с выбором будущей профессии (90%). Он обладает завидными волевыми качествами: может выполнять неинтересную, но нужную работу, не отвлекаясь (84%), предпочитает трудные работы легким (75%), старается выполнить работу во что бы то ни стало сам (50%) или, в крайнем случае, обращается за советом к руководителю (43%).

По затрачиваемому времени на первом месте работа в технических кружках и занятия спортом, затем учеба, далее чтение художественной литературы (в основном фантастической и приключенческой) и на последнем месте занятия общественной работой и посещения театров и концертов.

Учится юный техник в школе без особых затруднений (80%); любимые предметы — физика и математика (86%), однако сверхпрограммный материал даже по этим предметам изучает мало (15%).

Общителен, имеет много друзей (80%); больше всего ценит в друзьях честность и правдивость (100%), юмор и оптимизм (99%), самостоятельность в суждениях (98%), увлеченность делом (94%).

Предлагаем читателям «Кванта» попытаться самим ответить на подобные вопросы анкеты, изучить свой «автопортрет» и наметить программу самоусовершенствования.

В. Орлов

Фото А. Казимирова

Задачи наших читателей

1. Числа ИКС, ЛИСТ и ЛОЖКИ являются квадратом, кубом и четвертой степенью некоторого числа. Чему равен ИКС?

2. Числа ОСА, БАКУ и СУРОК являются квадратом, кубом и четвертой степенью некоторого числа. Найдите это число.

3. Извечному спору о «физиках» и «лириках» может положить конец следующее равенство:

$$\text{ЛИРИК}=\frac{1}{2}\cdot\text{ФИЗИКА}.$$

Дешифруйте его.

К утешению «лириков» этот ребус может быть «вывернут наизнанку»:

$$\text{ФИЗИК}=\frac{1}{2}\cdot\text{ЛИРИКА}$$

В. Радунский

Консультирует чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Шахматы в космосе

12 апреля 1981 года исполняется двадцать лет со дня замечательного события — первого полета человека в космос. Космический полет, совершенный Юрием Гагариным, «запечатлен» на следующей диаграмме.

В. Корольков, 1961 г. Мат в 5 ходов.

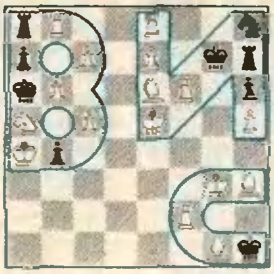
Шахматные фигуры, сосредоточенные в центре доски, символизируют Землю, половина которой (белые фигуры) освещена Солнцем. Космический корабль «Восток» (белый ферзь) совершает свой исторический виток вокруг Земли: **1.Фа1+! Крd5** (1... Фс3 2.Ф:с3+ Крd5 3.Фb4 Крс6 4.Кс3 и 5.Фb6×) **2.Фh1+! Крd4 3.Фh8+! Крd5 4.Ф:а8+! Крd4 5.Фе4×.**

Другой космический экспонат принадлежит перу двух известных шахматных композиторов, один из которых, ныне покойный Б. Сахаров, был выдающимся советским химиком и металлургом, членом-корреспондентом АН СССР, лауреатом Ленинской премии. Примечательно, что спутник, «запущенный» Кузнецовым и Сахаровым, выполнен в виде этюда, в котором все фигуры принимают активное участие. Это не так часто бывает в изобразительных композициях.

Ан. Кузнецов, Б. Сахаров, 1959 г. Ничья.

1.Са3! С:f5 (1...de 2.fg) **2.а7! С:а7 3.С:с5+ С:с5.** Старт! **4.b8Ф+! Кр:е6 5.Фg8+! Крe5 6.Фg3+! Крd5 7.Фb3+! Крd6 8.Фb8+! Крe6 9.Фg8+** с вечным шахом. Здесь черные фигуры символизируют Землю, а маршрут b8 — g8 — g3 — b3 — b8 — орбита ферзя, спутника Земли (в то время в космическое пространство летали только спутники).

Шахматы пользуются большой популярностью у космонавтов. Многие из них любят проводить свой досуг за шахматной доской. Достаточно сказать, что председателем Шахматной федерации СССР является дважды Герой Советского Союза, летчик-космонавт СССР В. И. Севастьянов. Ему посвящен следующий этюд, в котором каждая буква В. И, С — отдельная задача.



Э. Погосянц. В, И, С — мат в один ход.

Хитрость всех трех позиций в том, что предыдущий ход черных невозможен, то есть очередь хода всюду принадлежит им.

(В) 0...Л:b8 1.cbК×!; 0...ab 1.Л:а8×; 0...b3 1.с8Ф×! (И) 0...Кf7+ 1.Л:f7×; 0...Кg6+ 1.Л:g6×. (С) 0...Кр:g1 1.Лf1×. Каждая фигура во всех трех ретрозадачах играет определенную роль, то есть на доске нет ни одного статиста.

Когда заключительная партия матча в Багио была отложена, ее анализировали не только на земле. Космонавты Владимир Коваленок и Александр Иванченков в это время находились на борту космической станции «Салют-6» и попросили продиктовать им позицию. Расставив фигуры на специальной шахматной доске, приспособленной для игры в невесомости, они быстро убедились, что положение Карпова совершенно выиграно. Узнав на следующий день, что их оценка подтвердилась, космонавты направили чемпиону мира поздравительную телеграмму. Так что одно из первых поздравлений с победой в матче Анатолий Карпов получил из Космоса!

Первый шахматный матч между Землей и Космосом состоялся 10 лет назад. Космическую команду представлял экипаж корабля «Союз-9» — В. И. Севастьянов и А. И. Николаев, за Землю играли генерал-полковник Н. П. Каманин и космонавт В. В. Горбатко. Космическая схватка продолжалась несколько витков и после острой борьбы завершилась миром.

Космос — Земля
Ферзевый гамбит

1.d4 d5 2.с4 dc 3.е3 е5 4.С:с4 ed 5.ed Кс6 6.Се3 Сd6 7.Кс3 Кf6 8.Кf3 0 — 0 9.0 — 0 Сg4 10.h3 Сf5 11.Кh4 Фd7 12.Фf3 Ке7 13.g4 Сg6 14.Лае1 Крh8 15.Сg5 Кеg8 16.Кg2 Лае8 17.Се3 Сb4 18.а3 С:с3 19.bc Се4 20.Фg3 с6 21.f3 Сd5 22.Сd3 b5 23.Фh4 g6 24.Кf4 Сс4 25.С:с4 bc 26.Сd2 Л:е1 27.Л:е1 Кd5 28.g5 Фd6 29.К:d5 cd 30.Сf4 Фd8 31.Се5+ f6 32.gf К:f6 33.С:f6+ Л:f6 34.Ле8+ Ф:е8 35.Ф:f6+ Крg8. Ничья.

Кто знает, может быть, пройдет немного времени, и идея Остапа Бендера о междупланетном шахматном конгрессе станет реальностью!

Соединим две точки отрезком

1. $ABCD$ — это тетраэдр, или (плоский) четырехугольник, или треугольник, или отрезок.

3. г) Если D и E лежат по разные стороны от плоскости, содержащей A, B и C, то $(A+B+C)(D+E)$ — «внешний каркас» бипирамиды $ABCDE$ (без ребер AB, BC, CA); бипирамида — это две пирамиды, сложенные общим основанием.

5. а) Полоса; б) плоскость; в) «слой» между двумя параллельными плоскостями.

6. Если $\alpha^2=\alpha$ и $\beta^2=\beta$, то $(\alpha\beta)^2=(\alpha\beta)(\alpha\beta)=$

$$=((\alpha\beta)\alpha)\beta=(\alpha(\beta\alpha))\beta=(\alpha(\alpha\beta))\beta=$$

$$=((\alpha\alpha)\beta)\beta=(\alpha\alpha)(\beta\beta)=\alpha^2\beta^2=\alpha\beta.$$

7. б) Если $\beta=A+B+C+D$ и A, B, C, D, не лежат в одной плоскости, то β^2 — каркас тетраэдра $ABCD$, β^3 — поверхность этого тетраэдра, β^n при $n\geqslant 4$ — сам тетраэдр.

9. Если $\alpha=A+B+C$ и A, B, C не лежат на одной прямой, то α/α — шесть лучей — продолжений сторон $\triangle ABC$, а все остальные фигуры — объединение трех внешних углов треугольника.

10. а) A/B, AB, B/A; б) ABC, $(AB)/C$, $(AC)/B$, $(BC)/A$, $A/(BC)$, $B/(AC)$, $C/(AB)$.

12. г) Полуплоскость, если прямые λ_1, λ_2 параллельны; плоскость, если они пересекаются; полупространство, если скрещиваются.

13. а) Внешность круга.

17. Если α — линейная фигура, то для любых ее точек A, B имеем $\alpha\supset A/B$, а значит, и $\alpha\supset A/(A/B)$. Но $A/(A/B)\supset AB$ (сделайте чертеж!); поэтому $\alpha\supset AB$, то есть $\alpha\supset\alpha\alpha$.

18. Линейная, а значит и выпуклая (упр. 17), фигура вместе с любыми двумя своими точками содержит и всю прямую, проходящую через них (см. упр. 10а).

Бильярд

1. Не может, поскольку в противном случае, пустив частицу по той же траектории в обратном направлении (или, как говорят, обратив движение частицы во времени), получим, что, с одной стороны, частица должна двигаться внутри бильярда по замкнутой траектории и, с другой стороны, она, повторив свой первоначальный путь в обратном направлении, вылетит из бильярда.

2. а) Может; бильярд должен быть квадратом. **Указание.** Между любыми соседними звеньями траектории угол прямой. б) У траектории может быть только четное и любое четное ($\geqslant 4$) число звеньев.

3. Искомое множество указано красным цветом на рисунке 1 (здесь $(KL)\parallel(PR)$, $|AO|=|OV|$). **Указание.** На «клетчатой плоскости» выпрямленную траекторию могут пересекать прямые, параллельные каждой диагонали прямоугольника. Из равенства времен движения шаров A и M получаем «выпрямленное множество точек M», а из него — искомое множество в бильярде.

4. Обозначим сторону XY цифрой 1, YZ — цифрой 2, ZX — цифрой 3. Сделаем отражение треугольника XYZ относительно стороны *1* (рис. 2), получившийся треугольник отразим относительно стороны *2*, новый треугольник отразим относительно стороны *3*. Теперь видно, что максимальная длина траектории достигается в том случае, когда выпрямленная траектория идет из Z в Y'. Соответственно в исходном треугольнике траектория ведет из $Z(=A)$ в $Y(=B)$. Из прямоугольного треугольника $ZY'C$ $\frac{|ZY'|}{|ZX|}=\sqrt{7}$.

5. Если траектория γ замкнута, то все звенья разбиваются на пары параллельных звеньев (рис. 3); следовательно, в этом случае число звеньев может быть только четным. Траектория γ обязательно замкнута, поскольку из симметрии параллельных звеньев AB, CD (а значит, и всей траектории) относительно центра окружности вытекает, что если шар перешел со звена AB на звено CD после n отражений, то еще через n отражений он вернется на звено AB.

6. Будем отражать данный угол относительно его сторон до тех пор, пока не получим угол, больший или равный 180° (рис. 4). Выпрямленная траектория частицы может пересекать только эти отраженные углы. По условию их количество равно 1800. Следовательно, величина α укладывается в 180° не меньше 1800 раз и не больше 1801 раза, то есть

$$1800<\frac{180}{\alpha}<1801.$$

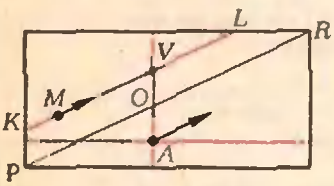


Рис. 1.

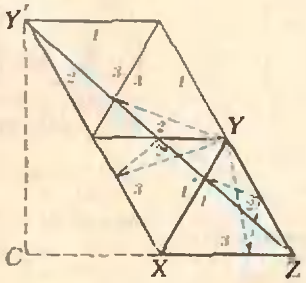


Рис. 2.

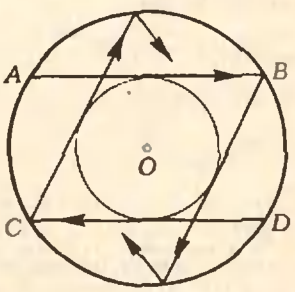


Рис. 3.

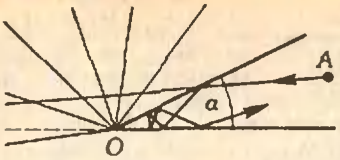


Рис. 4.

откуда

$$0{,}09994\ldots^\circ < \alpha \leqslant 0{,}1^\circ.$$

Задача как задача

При уменьшении x сечение поворачивается вокруг отрезка KL, приближаясь к трапеции $KLPB$, периметр которой равен 5/2. При $x=0$ сечение*) превращается в треугольник PBA, периметр которого равен 3; к заштрихованному сечению $KLMN$ как бы добавляется ранее находившийся вне тетраэдра треугольник LKW; при $x=0$ он превращается в треугольник LKA (см. рисунок 5).

В чем же ошибка Васи? Он правильно исследовал на отрезке [0; 1] функцию $\Phi(x)=\frac{3}{2}-x+\sqrt{4x^2-2x+1}$, но, к сожалению, $\Phi(x)$ — это не та функция. Дело в том, что искомый периметр сечения $P(x)$ совпадает с $\Phi(x)$ только при $x\in\,]0;\ 1]$, а при $x=0$ $P(x)$ терпит разрыв, делает «скачок» («добавляется треугольник»). Поэтому правильный ответ должен быть таким:

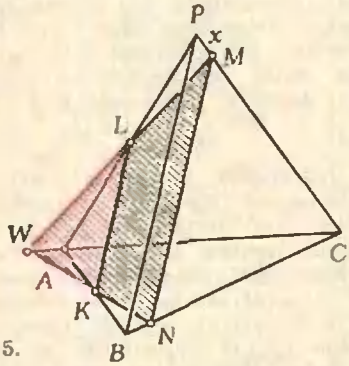


Рис. 5.

$$P(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}-x+\sqrt{4x^2-2x+1}, & \text{если } 0<x\leqslant 1,\\ 3, & \text{если } x=0;\end{cases}$$

$$\min P(x)=P\left(\frac{1}{2}\right)=2;$$

$$\max P(x)=P(0)=3.$$

Приближенные вычисления при решении задач по физике

1. $\alpha\leqslant 0{,}057$; $\alpha\leqslant 0{,}28$.
2. $\Delta t\approx 8{,}6$ с.
3. $g'\approx 978$ см/с^2.
4. $E\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2ql}{L^3}$.
5. $N_{\text{ср}}\approx\frac{mv}{2}\left(\frac{v^2}{2s}+ga+kg\right)\approx 10$ кВт.

Читатели советуют

1. $2ab/(a+b)$.

4. $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ $(k,n\in\mathbf{Z})$. Указание. Воспользуйтесь неравенствами

$$\sin^{11}x\leqslant\sin^2x,\ \cos^{11}x\leqslant\cos^2x,$$
$$\sin^4x\leqslant\sin^2x,\ \cos^4x\leqslant\cos^2x$$

и приведите данное уравнение к системе

$$\begin{cases}\sin^{11}x+\cos^{11}x=1,\\ \sin^4x+\cos^4x=1.\end{cases}$$

6. $\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}A\right)^p$. Указание. Возьмите окружность некоторого радиуса R и каждому набору значений переменных α, β, γ поставьте в соответствие вписанный в нее треугольник с этими величинами углов. Покажите, что

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\frac{S}{2R^2},$$

где S — площадь треугольника. Используйте тот факт, что из всех вписанных в данную окружность треугольников наибольшую площадь имеет равносторонний.

7. {6}.

8. {30, −61}.

9. {0}.

10. $\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$.

11. $[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$. Указание. Рассмотрите выражение в числителе как скалярное произведение векторов

$$\vec{m}=(a;\ b;\ c)\ \text{и}\ \vec{n}=(\cos x;\ \sin x;\ 1).$$

12. Указание. Рассмотрите скалярное произведение векторов

$$\vec{m}=(2^x;\ 3^y;\ 1)\ \text{и}\ \vec{n}=(a;\ b;\ 1).$$

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

1. $x_1=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\left(\pi-\arccos\frac{\pi}{4\sqrt{5}}\right)+2\pi k$, $x_2=\arccos\frac{2}{3}\pm\arccos\frac{\pi}{6}+2\pi l$ $(k,l\in\mathbf{Z})$. Указание. Уравнение $\cos\alpha=\sin\beta$ равносильно уравнению $\cos\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=0$. Уравнение $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m$ имеет решения только при таких m, при которых $\left|-\frac{\pi}{2}+2\pi m\right|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$. Уравнение $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=c$ равносильно (при $a\neq 0$ или $b\neq 0$) уравнению

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

или (при $a>0$, $b>0$) уравнению

$$\cos\left(x-\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

---

*) В школьном учебнике под *сечением* многогранника плоскостью понимается их пересечение (как двух множеств), хотя это явно там не сказано.

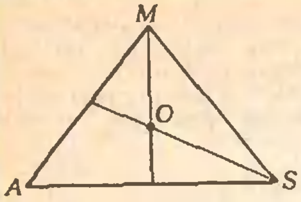


Рис. 6.

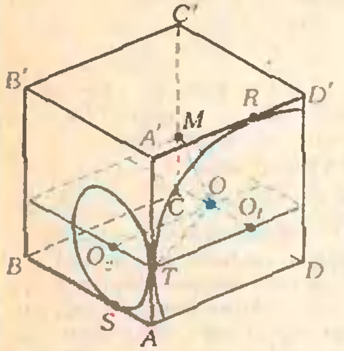


Рис. 7.

2. $\frac{5}{\sqrt{7}}R$. Указание. $\widehat{MAC}=\widehat{MCA}=30°$. Из $\triangle AMC$ выразите $|AC|$ через $|MC|$, затем примените к $\triangle ABC$ теорему косинусов.

3. $a\geqslant 12$. Указание. Искомое множество является областью значений функции $z=5^{1+x}+5^{1-x}+25^x+25^{-x}=5\cdot 5^x+5\cdot 5^{-x}+(5^x)^2+(5^{-x})^2=\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)^2+5\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)-2$. При всех $x\in \mathbf{R}$

$$5^x+\frac{1}{5^x}\geqslant 2.$$

4. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Указание. Рассмотрев пересечение данной сферы с плоскостью ABC, покажите, что эта сфера касается ребер AB и AC в их серединах. Аналогично покажите, что данная сфера касается всех остальных ребер тетраэдра $SABC$ и тоже — в их серединах. Значит, ее центр O лежит на пересечении его высот. Искомый радиус $|OM|$ можно теперь найти из равнобедренного треугольника AMS, где M — середина ребра BC (рис. 6). Замечание. Условие, что центр данной сферы лежит внутри тетраэдра, является следствием остальных условий задачи. При некоторых способах решения оно облегчает отбор нужного корня возникающего квадратного уравнения.

5. $|a|\geqslant 4$. Указание. Пусть a — искомое. Если $b\neq\pm 1$, то система при любом c имеет (единственное) решение. При $b=1$ система имеет вид

$$\begin{cases} x+y=ac^2,\\ x+y=ac+1,\end{cases}$$

а при $b=-1$ — вид

$$\begin{cases} x-y=-ac^2,\\ x-y=ac+1.\end{cases}$$

Первая из этих систем имеет решения (и даже бесконечно много решений) тогда и только тогда, когда c таково, что $ac^2=ac+1$. Таким образом, полученное квадратное уравнение (относительно c) должно иметь по крайней мере один корень, то есть должно быть $a^2+4a\geqslant 0$. Аналогично, рассматривая вторую систему, мы получаем, что должно быть разрешимо уравнение $-ac^2=ac+1$, то есть должно быть $a^2-4a\geqslant 0$. Общие решения этих двух неравенств и дают ответ к задаче.

Вариант 2

1. $x_1=\pi k,\ x_2=-\frac{\pi}{2}+2\pi l\ (k, l\in \mathbf{Z})$.

2. $2\pi(2-\sqrt{3})$. Указание. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность («Геометрия 6—8», п. 87); эта окружность будет описанной и около треугольника ABD. Ее радиус R находится, например, при помощи равенства $a=2R\cdot\sin A$ (a — длина стороны треугольника, A — величина противолежащего угла, R — радиус описанной окружности) — докажите его сами или посмотрите в п. 112 пособия «Геометрия 8» (М., «Просвещение», 1978).

3. $x=\log_2\frac{1+\sqrt{1+2a}}{a}$ при $a\in\,]0;4]$. Указание. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\log_2\frac{2(1+2^{-x})}{2^x}=\log_2 a.$$

Кроме того, $x\geqslant 0 \Leftrightarrow 2^x\geqslant 1$.

4. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Указание. Пересечение данной сферы с гранью $AA'D'D$ есть окружность, касающаяся ребер AA' и $A'D'$ в точках T и R (рис. 7). Аналогично пересечение сферы с гранью $AA'B'B$ есть окружность, касающаяся ребра AA' в точке T и ребра AB в точке S. Центр сферы O лежит на пересечении перпендикуляров к указанным граням, проведенным из центров O_1, O_2 окружностей. Эти перпендикуляры лежат в плоскостях $A'DCB'$ и $AB'C'D$, поэтому точка O лежит на линии их пересечения $B'D$. Поскольку все точки прямой $B'D$ равноудалены от прямых AA' и CC' и сфера касается (AA'), она касается и (CC'). Значит, точка M является точкой касания сферы и (CC'). Отсюда следует, что плоскость TOM параллельна основанию $ABCD$. Искомый радиус $|OT|$ находится, например, из треугольников OO_1T.

5. Множество решений неравенства $x^4-4x^2+3\leqslant 0$ есть $A=[-\sqrt{3};\ -1]\cup[1;\ \sqrt{3}]$.

$$\max_A(1+ax-x^2)=\begin{cases} -\sqrt{3}a-2, & \text{если } a<-2\sqrt{3},\\ 1+\frac{a^2}{4}, & \text{если } -2\sqrt{3}\leqslant a\leqslant -2,\\ -a, & \text{если } -2<a<0,\\ 0, & \text{если } a=0,\\ a, & \text{если } 0<a<2,\\ 1+\frac{a^2}{4}, & \text{если } 2\leqslant a\leqslant 2\sqrt{3},\\ \sqrt{3}a-2, & \text{если } a>2\sqrt{3}.\end{cases}$$

Указание. Пока $a<-2\sqrt{3}$, абсцисса $\frac{a}{2}$ вершины параболы $1+ax-x^2$ лежит левее множества A и функция $y=1+ax-x^2$, убывая на $\left[\frac{a}{2};+\infty\right[$, принимает наибольшее значение на множестве A при $x=-\sqrt{3}$. Если

$-2\sqrt{3} < a < -2$, то $\frac{a}{2} \in A$ и функция $y = 1 + ax - x^2$ принимает наибольшее значение на множестве A при $x = \frac{a}{2}$. Когда $-2 < a < 0$, имеем $-1 < \frac{a}{2} < 0$; функция $y = 1 + ax - x^2$ возрастает на $\left]-\infty;\ \frac{a}{2}\right]$ и убывает на $\left[\frac{a}{2};\ +\infty\right[$; значит, наибольшее значение на множестве A она принимает при $x = -1$ или при $x = 1$; поскольку в данном случае $\frac{a}{2}$ ближе к -1, чем к 1, и график функции $y = 1 + ax - x^2$ симметричен относительно прямой $x = \frac{a}{2}$, искомое наибольшее значение принимается при $x = -1$. И т. д.

Физика

Вариант 2

1. Из уравнения движения мячика по горизонтали $|\vec{v}|\sin\alpha \cdot t - gt^2/2 = H$ найдем время его движения до потолка:

$$t = \frac{|\vec{v}|\sin\alpha}{g} - \sqrt{\left(\frac{|\vec{v}|\sin\alpha}{g}\right)^2 - \frac{2H}{g}}$$

(знак «+» отброшен, так как он не соответствует физическому смыслу). Искомое расстояние

$$|AB| = |\vec{v}|\cos\alpha \cdot 2t = \frac{|\vec{v}|^2 \sin 2\alpha}{g} \times \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2gH}{(|\vec{v}|\sin\alpha)^2}}\right)$$

$\left(H < \frac{|\vec{v}|^2 \sin^2\alpha}{2g}\right.$, так как мячик ударился о потолок).

2. $|\vec{F}| = \frac{mg}{2}\sin\alpha$. Указание. Запишите правило моментов для оси, проходящей через точку приложения силы $\vec{F}$, и условие равенства нулю суммы проекций всех сил на направление вдоль наклонной плоскости.

3. Так как скорость стержня постоянна, силы, действующие на него, уравновешены:

$$\vec{F} = -m\vec{g}, \text{ или } F = mg.$$

Здесь $\vec{F}$ — сила действия магнитного поля на ток; ее модуль

$$|\vec{F}| = |\vec{B}|Il,$$

где ток в цепи

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{\text{инд}}}{R}.$$

ЭДС индукции, возникающая в движущемся проводнике, равна

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = |\vec{B}|\,l\,|\vec{v}|.$$

Таким образом,

$$I = \frac{\mathcal{E} - |\vec{B}|\,l\,|\vec{v}|}{R},\quad |\vec{B}|\,l\,\frac{\mathcal{E} - |\vec{B}|\,l\,|\vec{v}|}{R} = mg,$$

откуда

$$|\vec{v}| = \frac{\mathcal{E}}{|\vec{B}|\,l} - \frac{mgR}{|\vec{B}|^2 l^2}.$$

4. Для оценки будем считать, что вся масса гимнаста сосредоточена в его центре тяжести на расстоянии l от перекладины и что в верхнем положении скорость гимнаста равна нулю. Тогда из уравнения движения для нижнего положения

$$\frac{mv^2}{l} = |\vec{F}| - mg$$

и из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mg2l$$

найдем модуль $|\vec{F}|$ силы реакции со стороны перекладины, а значит, и модуль $|\vec{N}|$ силы давления гимнаста на перекладину:

$$|\vec{N}| = |\vec{F}| = 5mg.$$

Выбирая $m \sim 60$ кг, получим

$$|\vec{N}| = 5mg \sim 3 \text{ кН}.$$

5. Если пренебречь увеличением просвета в канале в результате покачивания гвоздя, главным эффектом будет изменение направления силы трения, действующей на гвоздь, при его поворачивании. Поворачивая и вытягивая гвоздь, надо преодолевать не всю силу трения, а лишь ее проекцию вдоль гвоздя. А сгибать гвоздь надо для того, чтобы легче было его поворачивать (большое плечо — большой момент при малой силе).

Вариант 3

1. $U = \frac{\mathcal{E}_1(r_2 + R) + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2 + R}$.

2. Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{l} + \frac{kl^2}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4l} + \frac{k4l^2}{2},$$

откуда

$$k = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 l^3}.$$

3. Количество молей газа в верхней части сосуда равно $\nu_1 = \frac{(p_0 + mg/S)lS}{RT}$, а в нижней — $\nu_2 = \frac{plS}{RT}$. После того как перегородку убрали, давление во всем сосуде стало равным $p_0 + mg/S$. Запишем уравнение состояния газа для этого состояния: $p'V' = (\nu_1 + \nu_2)RT_1$, или

$$\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)(2l - x) = \frac{(p_0 + mg/S + p)lRT_1}{RT},$$

где x — смещение поршня.

Согласно первому закону термодинамики работа внешних сил равна изменению внутренней энергии газа: $p'\Delta V = \Delta U$, или

$$\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)Sx = C\,\frac{(p_0 + mg/S + p)lS}{RT}(T_1 - T).$$

Из полученных двух уравнений найдем

$$x = l\,\frac{C}{C + R}\,\frac{p_0 + mg/S - p}{p_0 + mg/S}.$$

4. Пусть высота уровня воды в ванне $H \sim 0{,}5$ м, площадь сечения ванны $S \sim 1$ м^2 и площадь отверстия $S_0 = \pi r^2 \sim 10^{-3}$ м^2. Приравнивая объем HS воды в ванне к объему $v_{\text{ср}}tS_0$ вытекающей воды и положив среднюю скорость

вытекания воды $v_{ср} \sim \sqrt{2gH}$, получаем

$$t \sim \frac{SH}{\sqrt{2gH}S_0} \sim 3 \text{ мин.}$$

5. Под действием поля заряженного шара A (см. рис. 8) на изолированном шарике B заряды перераспределяются: заряды противоположного знака (относительно заряда шара A) располагаются ближе к шару A, а одноименные заряды — дальше от него, то есть ближе к заземленному шару C. В свою очередь на заземленном шаре C индуцируется заряд противоположного знака относительно заряда шара A (одноименные заряды при этом уходят в землю). В результате, когда шарик B находится близко к шару A, шарик B сильнее притягивается к шару A, нежели к шару C. Когда же шарик B находится далеко от шара A, сила притяжения его к шару C больше, чем к шару A.

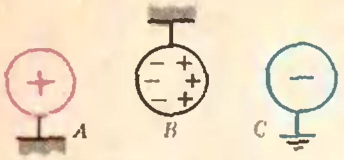


Рис. 8.

Задачи наших читателей

1. 169. 2. 17. 3. Равенство $87375 = \frac{1}{2} \cdot 174750$ является решением обоих ребусов.

Шахматный конкурс

(см. «Квант» № 1)

1. **1.h7+ Kpg7** (1...Kph8 2. Cf6×) **2. h8Ф+ Kp:h8 3. Kpf7 Лf1+ 4. Cf6+ Л:f6+ 5. Kp:f6 Kpg8 6. g7** и т. д.

2. **1.Л:h7+! Kp:h7 2.Фh1+ Kpg7 3.Ch6+ Kpf6 4.Фh4+ Kpe5 5.Ф:d4+. Черные сдались** (5...Kpf5 6.g4×).

3. **1.g6! Ф:g6** (1...hg 2.Kg5) **2.C:g7 Ф:h6** (2...Ф:g7 3.Лhg1) **3.C:h6.** Черные остались без фигуры и через пять ходов сдались.

(см. «Квант» № 2)

1. Чигорин — Янкович (Москва, 1899 г.). **1.Ca7+!** Такой комбинационный удар называется «рентгеном» — одна фигура (здесь ладья a1) оказывает сквозное действие на другую (слона a7) через неприятельские фигуры (ладью a6). **1...Л:a7 2.Л:a7. Черные сдались.**

2. Чигорин — Яновский (Париж, 1900 г.). **1.f5!** (тема завлечения) **1...C:f5 2.Фc5!** (двойной удар). Черные сдались (грозит Фf8× и K:f5+).

3. Чигорин — Тарраш (Монте-Карло, 1902 г.). **1.Лh3!** (прямолинейное 1.Kg6+ опровергается путем 1...hg 2.Лh3 Лh7! 3.Л:h5 Л:h5 и черные отыгрывают ферзя, оставаясь с лишней фигурой) **1...Лfg7 2.Kg6+! hg 3.fg! Черные сдались** (3...Ф:h3 4.Ф:h3+ Kpg8 5.Ф:g4).

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 3)

2. Число 1111 — полный квадрат в семеричной системе счисления:

$$1111_7 = 7^3 + 7^2 + 7 + 1 = 400_{10},$$
$$\sqrt{1111_7} = \sqrt{400_{10}} = 20_{10} = 2 \cdot 7 + 6 = 26_7.$$

Число 11111 — полный квадрат в троичной системе счисления:

$$11111_3 = 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 121_{10},$$
$$\sqrt{11111_3} = \sqrt{121_{10}} = 11_{10} = 3^2 + 0 \cdot 3 + 2 = 102_3.$$

3. а) 129, 387, 645. б) 192, 384, 576; 219, 438, 657; 273, 546, 819; 327, 654, 981.

4. Поскольку число $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 7(14a + b) + (2a + 3b + c)$ делится на 7, выражение $2a + 3b + c$ должно делиться на 7. Поскольку $a + b + c$ делится на 7, на 7 должна делиться и разность $(2a + 3b + c) - (2a + 2b + 2c) = b - c$. По условию $b \neq c$. Кроме того, очевидно, что $c \neq 0$ и $b \neq 0$. Поэтому возможны только следующие варианты пар значений b и c:

b	1	8	2	9
c	8	1	9	2

Искомые числа $\overline{abc}$ таковы:

518, 581, 329, 392.

5. Проведем окружность с центром в точке O; пусть A и B — точки ее пересечения со сторонами угла (рис. 9). От точки B на получившейся окружности раствором циркуля $|OB|$ последовательно сделаем три засечки A_1, A_2, A_3 (A_3 — диаметрально проти-

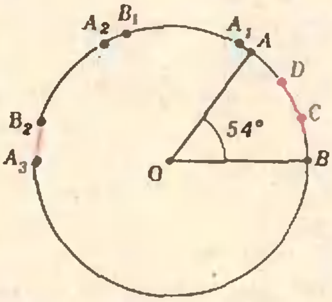


Рис. 9.

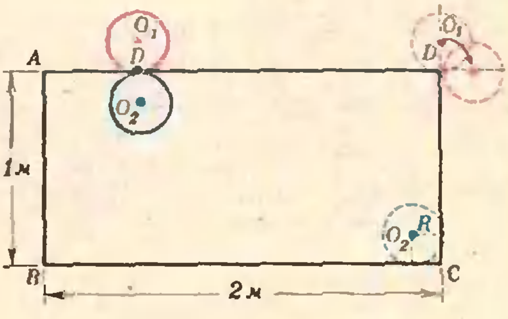


Рис. 10.

воположна B). Проделаем ту же процедуру раствором циркуля $|AB|$; получим точки B_1, B_2; дуга A_3B_2 содержит 18°. Снова сделав три засечки от точки B раствором циркуля $|A_3B_2|$, получим искомые точки C и D.

6. Вернувшись в исходное положение, внешняя окружность (с центром O_1 — рис. 10), во-первых, совершит 12 оборотов, прокатившись по периметру прямоугольника ($6:0{,}5=12$). Кроме того, при переходе через каждую вершину прямоугольника окружность дополнительно совершает четверть оборота (см. рис. 10), так что, пройдя все четыре вершины, внешняя окружность совершит еще один оборот, а значит, всего — 13 оборотов.

Внутренняя же окружность, перекатываясь по сторонам прямоугольника, проходит путь, на $8R$ меньший его периметра; R — радиус окружности, то есть $R=\frac{0{,}5}{2\pi}$. Таким образом внутренняя окружность, пройдя путь $6-8\cdot\frac{0{,}5}{2\pi}=6-\frac{2}{\pi}$, совершит $\left(6-\frac{2}{\pi}\right):0{,}5=\left(12-\frac{4}{\pi}\right)\approx 10{,}9$ оборотов.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 3, с. 15)

1. а)
$$\overbrace{11\ldots1}^{n}\,\overbrace{55\ldots56}^{n}=\overbrace{11\ldots1}^{n}\cdot10^n+5\cdot\overbrace{11\ldots1}^{n}+1, \qquad (1)$$
$$\overbrace{11\ldots1}^{n}=1+10+10^2+\ldots+10^{n-1}=\frac{10^n-1}{9}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем:
$$\overbrace{11\ldots1}^{n}\,\overbrace{55\ldots56}^{n}=\frac{1}{9}(10^n-1)\times10^n+\frac{5}{9}(10^n-1)+1=\left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2$$

Поскольку 10^n при делении на 3 дает в остатке 1, число $\frac{10^n+2}{3}$ — целое.

2. а) $\overbrace{90\ldots0}^{n}\,\overbrace{60\ldots01}^{n}=9\cdot10^{2n+2}+2\cdot3\cdot10^{n+1}+1=(3\cdot10^{n+1}+1)^2$.

б) 121, 144, 169, 441, 484.

3. а)
$$\frac{\overbrace{199\ldots9}^{n}}{\underbrace{99\ldots95}_{n}}=\frac{2\cdot10^n-1}{10^{n+1}-5}=\frac{2\cdot10^n-1}{10\cdot10^n-5}=\frac{1}{5}.$$

б)
$$\frac{\overbrace{166\ldots6}^{n}}{\underbrace{66\ldots64}_{n}}=\frac{1}{4} \text{ и } \frac{\overbrace{266\ldots6}^{n}}{\underbrace{66\ldots65}_{n}}=\frac{2}{5}$$

(при любом n).

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шихanович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров,
А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры Т. Вайсберг, Е. Сидоркина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 12.2.81
Подписано в печать 27.3.81
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,04 Т-05736
Цена 30 коп. Заказ 338 Тираж 237 027 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

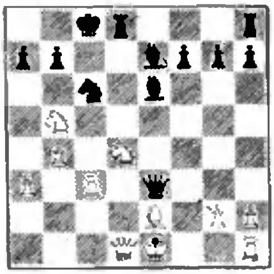
IV

ШАХМАТНЫЙ КОНКУРС

Смена шахматных королей

Продолжаем наш краткий рассказ о матчах на первенство мира по шахматам. Сегодня смена шахматных королей произойдет дважды.

Поражение в первом поединке от Ласкера не убедило Яновского в тщетности надежд, и он вызвал чемпиона мира на новый матч. Однако на этот раз победа Ласкера оказалась еще более внушительной. Эпизод из пятой партии этого матча 1910 года иллюстрирует психологический метод Эм. Ласкера, часто избиравшего продолжения не объективно лучшие, а те, которые были не по душе данному конкретному партнеру.

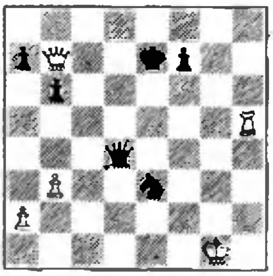


Ласкер — Яновский

После 17...Ф:c3+! 18.К:c3 К:d4! черные получали все шансы на успех, однако они проявляют нерешительность, которая не остается безнаказанной.

17...Сh4+? 18.g3 Фe4 19.0—0 Сf6 20.Л:f6! gf 21.Сf3 Фe5 22.К:a7+ Крc7 23.Кa:c6 bc 24.Л:c6+ Крb8 25.Лb6+ Крc8 26.Фc1+ Крd7 27.К:e6 fe 28.Лb7+ Крe8 29.Сc6+. Черные сдались.

Эммануил Ласкер правил шахматным миром 27 лет! В наше бурное время, когда желающих взойти на шахматный трон так много, трудно представить себе, что этот рекорд может быть побит! Хотя в дальнейшем Ласкер еще не раз показывал выдающиеся результаты, матч с Капабланкой в 1921 году у него не получился. Ласкер сдал его при счете 5:9 за 10 партий до конца матча. Хосе Рауль Капабланка стал третьим чемпионом мира. О плохой форме Ласкера свидетельствует окончание пятой партии матча, в которой он потерпел первое поражение.

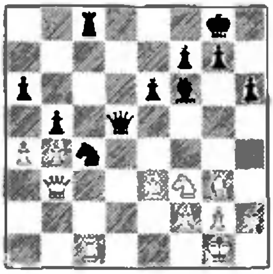


Капабланка — Ласкер

Черные здесь легко делали ничью, играя королем на e6 или f6. Однако последовало **45...Крf8??** и после **46.Фb8+!** Ласкер сдался (**46...Крg7 47.Фh8+, 46...Крc7 47.Фe5+**).

Битва между Алехиным и Капабланкой в 1927 году — одно из самых выдающихся событий за всю историю шахмат. В борьбе за мировую корону не было матча ни более продолжительного (34 партии), ни более напряженного (32 изнурительных ферзевых гамбита). Но, самое главное, в поединке встретились два шахматных гиганта, находящихся в расцвете творческих сил. Непобедимый Капабланка, высказавший гипотезу о «ничейной смерти шахмат», и великий мастер комбинаций Алехин, своей неудержимой фантазией опровергающий эту гипотезу!

Приводим финал 21-й партии исторического матча.



Капабланка — Алехин

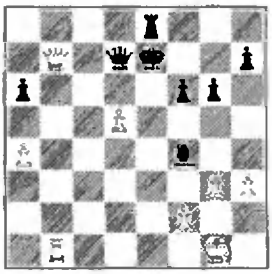
26...Сb2! 27.Лe1. Оказывается, у белой ладьи нет удачного отступления: 27.Лb1 Кa3! 28.Ф:b2 К:b1 29.Ф:b1 Фb3! 30.Фf1 ba 31.h3 a3 или 27.Лd1 ba! 28.Ф:a4 Кb6 29.Л:d5 К:a4 30.Лd1 Кc3 31.Лe1 Лc4 с выигрышем в обоих случаях. **27...Лd8 28.ab ab 29.h3 e5 30.Лb1 e4 31.Кd4 С:d4 32.Лd1 К:e3!** Эффектный заключительный удар. Белые сдались, ввиду варианта 33.Ф:d5 Л:d5 34.Л:d4 Л:d4 35.fc Л:b4.

Одержав в матче шесть необходимых побед, Александр Алехин не только стал четвертым шахматным королем, но и доказал миру неисчерпаемость шахматного искусства.

Найдите теперь три красивые комбинации, принадлежащие Капабланке.

1. Белые начинают и выигрывают.

2. Белые начинают и выигрывают.



3. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 31 мая 1981 г.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

ПОДВИГУ ГАГАРИНА ПОСВЯЩАЕТСЯ

Прошло ровно двадцать лет с момента старта первого космического корабля с человеком на борту. Советский космонавт Юрий Гагарин открыл человечеству путь в космос. По этому пути прошли уже десятки других героев, но подвиг, совершенный Гагариным, с годами не меркнет.

Полет Гагарина получил огромный отклик в международной филателии. Во многих странах были выпущены почтовые марки и блоки с портретом Юрия Гагарина и изображением космического корабля «Восток-1», на котором он совершил свой полет. Большое число марок и блоков, посвященных этой теме, выпустили почтовые ведомства многих стран к десятилетию и пятнадцатилетию полета (в 1971 и 1976 годах). Продолжали они выходить и в последующие годы. Пожалуй, не было ни одного года, в котором не появились бы новые почтовые знаки, посвященные подвигу Гагарина.

В нашей подборке воспроизведены почтовый блок и некоторые марки, выпущенные в Советском Союзе, Польше, Чехословакии, на Кубе, в Республике Экваториальная Гвинея и Демократической Республике Сан-Томе и Принсипи после 1975 года и посвященные Юрию Гагарину.

В. Рудов